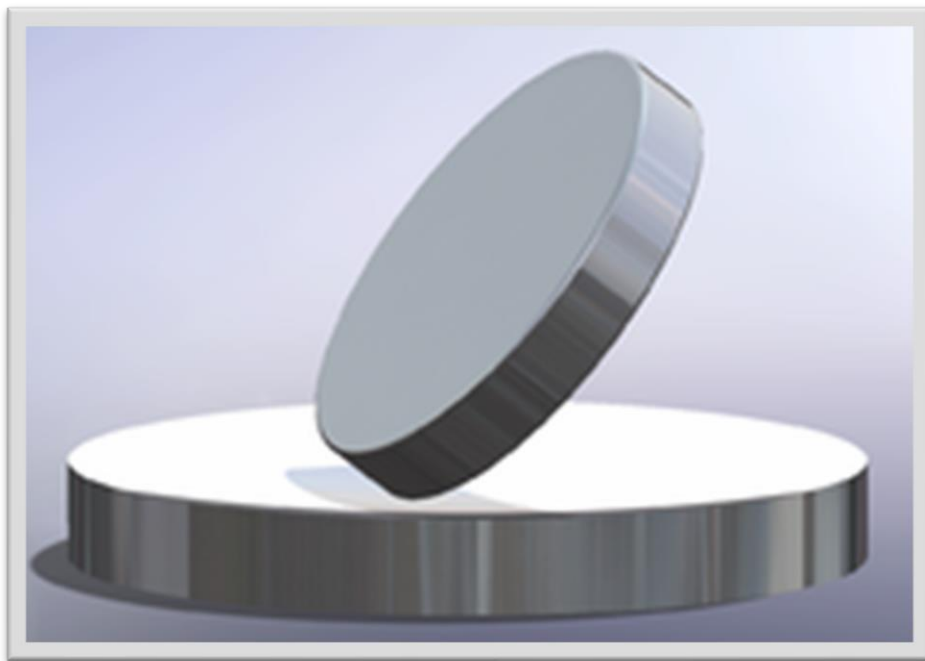


Le disque d'Euler :
Une pièce de monnaie tourne-t-elle plus vite
avant de s'arrêter ?



Étudiants :

Marie-Céline Olieslagers

Fanny Chigros

Charles Aussert

Corentin Fradier

Tuteur :

Sébastien Lengagne

Année : 2019-2020

Table des matières :

Table des illustrations :	3
Remerciements.	3
Summary	4
Résumé	5
Introduction.	6
I - LA THÉORIE	8
1) Les vitesses	8
2) La théorie classique sans frottement	9
3) Les mécanismes de dissipation.	11
A) Frottement classique de roulement.	12
B) Frottement de glissement.	12
C) Frottement de pivotement.	13
D) La viscosité de l'air.	13
4) Les caractéristiques du disque	14
II - NOS EXPÉRIENCES.	16
1) Expériences liées aux vitesses.	16
A) 1ère expérience : Vitesse α .	16
B) 2ième expérience : Vitesse de précession Ω .	16
C) 3ième expérience : Vitesse ω .	17
D) Expérience réalisée.	17
2) Frottements.	22
Conclusion.	25
Annexes :	27
Sources :	33

Table des illustrations :

FIGURE 1: SCHEMA REPRESENTANT LES AXES DE ROTATIONS	4
FIGURE 2: SCHEMA REPRESENTANT LES AXES DE ROTATIONS	5
FIGURE 3: SCHEMA DESCRIPTIF DU SYSTEME	8
FIGURE 4: COURBES REPRESENTATIVES DE L'EVOLUTION DES VITESSES EN FONCTION D'ALPHA	10
FIGURE 5 : SCHEMA DES DIFFERENTS REPERES UTILES POUR L'EXPLICATION DE L'IMPACT DES FROTTEMENTS SUR LE DISQUE	11
FIGURE 6 : TABLEAU COMPARATIF DE LA RESISTANCE ET DE LA DENSITE DE DIFFERENTS MATERIAUX	15
FIGURE 7: SCHEMA REPRESENTANT LA PREMIERE EXPERIENCE	16
FIGURE 8 : SCHEMA REPRESENTANT LA DEUXIEME EXPERIENCE	16
FIGURE 9 : SCHEMA REPRESENTANT LA TROISIEME EXPERIENCE	17
FIGURE 10 : PREMIERE PHOTO DU LANCEUR DE DISQUE	18
FIGURE 11: SCHEMA DEFINISSANT UN TOUR D'USINAGE	19
FIGURE 12 : TABLEAU REGROUPANT LES RESULTATS DE L'EXPERIENCE SUR LES VITESSES.....	20
FIGURE 13 : CAPTURE D'ECRAN LORS DE LA SIMULATION DES FROTTEMENTS AVEC LE LOGICIEL MOSIM	23
FIGURE 14 : TABLEAU RELEVANT LES COORDONNEES DES VITESSES EN FONCTION DES AXES	24
FIGURE 15 : COURBE REPRESENTANT LA NORME DE LA VITESSE EN FONCTION DU TEMPS	24
FIGURE 16: DIAGRAMME DE GANTT ILLUSTRANT L'AVANCEMENT DU PROJET	27
FIGURE 17: DESCRIPTION DE L'AVANCEMENT	28
FIGURE 18 : SECONDE PHOTO DU LANCEUR DE DISQUE, VUE DE DESSOUS	28
FIGURE 19 : PREMIER DESSIN D'ENSEMBLE DU LANCEUR	29
FIGURE 20 : DEUXIEME DESSIN D'ENSEMBLE DU LANCEUR.....	29
FIGURE 21 : DERNIER DESSIN D'ENSEMBLE DU LANCEUR	30
FIGURE 22 : SCHEMA DEFINISSANT UN TOUR D'USINAGE.....	32

Remerciements.

Durant de ce projet, nous avons été épaulés et aidés par différentes personnes qui nous ont permis de mener à bien nos recherches. C'est pourquoi, nous souhaitons tout d'abord, remercier notre tuteur de projet, Mr Lengagne, qui nous a guidés tout au long de ce projet et qui a été disponible dès que nous avons des interrogations.

Ensuite, nous souhaitons remercier Mr Moffatt, qui nous a envoyé ses travaux sur le disque d'Euler, pour donner suite à nos interrogations par rapport à nos résultats expérimentaux.

Nous remercions aussi les étudiants de Polytech Clermont-Ferrand, faisant partie de l'association C-Tronic, qui ont été responsables de l'impression 3D de notre lanceur de disque et en particulier, Etienne Torzini, la personne avec qui nous avons pris contact.

Enfin, nous remercions la Société Reynard, située à Courpière, pour la fabrication des deux disques.

Summary.

It is common to see an object, having a speed, slowing down before stopping, it seems logical to us. However, when we look at Euler's disc, whose movement is like that of a coin, we have the impression that it accelerates before stopping abruptly. So, we wondered if the disc was spinning faster before it stopped, or if this was only due to an optical illusion.

We first noticed that the movement of the disc was composed of three angular velocities: the angular velocity ω , the precession velocity and the angular velocity α . Therefore, we were interested in the formulas of the velocities and their evolution over time. So, we could notice that they did not evolve in the same way. Indeed, the precession velocity increases while the other two velocities decrease. In order to understand which phenomena allow this evolution of the speeds, we studied the various forces at play, such as the friction forces, to understand how they lead to a loss of energy that allows the decrease of certain speeds. Finally, we looked at the characteristics of the disc which could allow it to be less impacted by these energy losses, and therefore to rotate longer.

Then, in order to confirm our research and to have a more concrete approach of the subject, we carried out various experiments. The first allowed us to confirm that the speeds did not evolve in the same way. The second highlighted the influence of friction on speeds. We saw that friction caused a energy loss which explained the decrease in certain speeds. Moreover, we also noticed that we could attenuate these frictions by modifying some characteristics of the disc, such as the density.

We concluded that before stopping, the disc doesn't necessarily turn faster, it depends on the speed we study; indeed, the precession speed accelerates but the ω and α speeds decrease. Moreover, it is important to choose the material of the disc, so that it's the least subject to friction, for example a steel disc is a good choice. Finally, don't forget to pay attention to the chosen support, it must be smooth to reduce friction as much as possible.

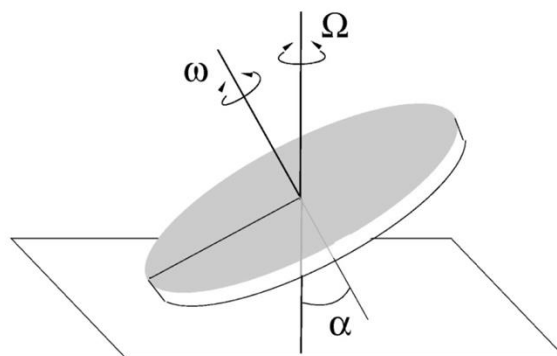


Figure 1: schéma représentant les axes de rotation

Résumé.

Il est courant de voir un objet, ayant une vitesse, ralentir avant de s'arrêter : cela nous paraît logique. Pourtant, lorsque nous regardons tourner le disque d'Euler, dont le mouvement est semblable à celui d'une pièce de monnaie, nous avons l'impression qu'il accélère avant de s'arrêter brutalement. Nous nous sommes alors demandé si, effectivement, le disque tournait plus vite avant de s'arrêter, ou bien si cela était seulement dû à une illusion d'optique.

Nous avons tout d'abord remarqué que le mouvement du disque était composé de trois vitesses angulaires : la vitesse angulaire ω , la vitesse de précession Ω et la vitesse angulaire α . Nous nous sommes donc intéressés aux formules des vitesses et leurs évolutions au cours du temps. Nous avons ainsi pu remarquer qu'elles n'évoluaient pas de la même manière. En effet, la vitesse de précession augmente alors que les deux autres vitesses diminuent. Afin de comprendre quels phénomènes permettent cette évolution des vitesses, nous avons étudié les différentes forces en jeu, telles que les forces de frottements, pour comprendre comment elles entraînaient une perte d'énergie qui permettait la diminution de certaines vitesses. Enfin, nous avons regardé quelles caractéristiques du disque pouvaient lui permettre d'être moins impacté par ces pertes d'énergies, donc tourner plus longtemps.

Ensuite, afin de confirmer nos recherches et d'avoir une approche plus concrète du sujet, nous avons réalisé différentes expériences :

-La première nous a permis de confirmer que les vitesses n'évoluaient pas de la même manière.

-La seconde a mis en évidence l'influence des frottements sur les vitesses.

Nous avons ainsi vu que les frottements entraînaient une perte d'énergie qui expliquait la diminution de certaines vitesses. De plus, nous avons aussi remarqué que nous pouvions atténuer ces frottements en modifiant certaines caractéristiques du disque, comme la densité.

Nous en avons conclu qu'avant de s'arrêter le disque ne tourne pas forcément plus vite. Cela dépend de la vitesse que nous étudions. En effet, celle de précession accélère mais les vitesses ω et α diminuent. De plus, il est important de choisir le matériau du disque de telle sorte qu'il soit le moins sujet aux frottements. Par exemple, un disque en acier est un bon choix. Enfin, il ne faut pas oublier de faire attention au support choisi, il doit être lisse pour diminuer au maximum les frottements.

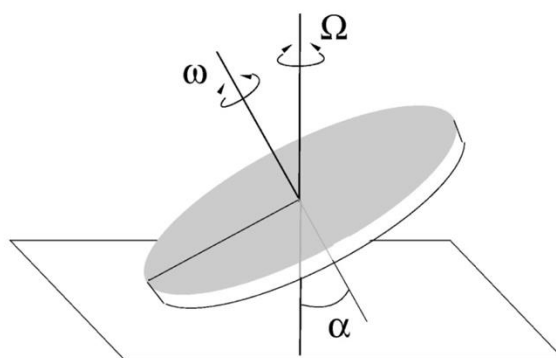


Figure 2: schéma représentant les axes de rotation

Introduction.

Tout le monde a déjà essayé de faire tourner une pièce de monnaie sur elle-même le plus longtemps possible, ce phénomène dure rarement bien longtemps. Joseph Bendik, ingénieur en aérospatiale, s'est intéressé dans les années 1980 au mouvement que font les pièces de monnaie au moment où elles tombent sur le sol.

Il imagina alors le disque d'Euler, un disque pouvant tourner sur lui-même, telle une pièce de monnaie, mais qui tourne plus longtemps. Pour cela, il créa un disque particulièrement lourd et lisse tournant sur une surface concave pour pouvoir atteindre le maximum de ses capacités, c'est-à-dire rester en rotation pendant près de 3 minutes.

Cet objet d'apparence simple a pourtant donné beaucoup de fils à retordre aux mathématiciens et physiciens, comme Keith Moffatt, qui ont essayé de trouver les équations mathématiques et phénomènes physiques permettant de définir le mouvement du disque.

De notre côté, nous avons remarqué que le disque semble accélérer avant de s'arrêter brutalement, ce que nous ne trouvons pas naturel. Nous nous sommes alors demandé si, effectivement, le disque tournait plus vite avant de s'arrêter, ou bien si cela était seulement dû à une illusion d'optique.

C'est pourquoi nous allons nous demander si le disque accélère avant de s'arrêter.

Tout d'abord, il est important de comprendre ce qu'est l'accélération. Or celle-ci résulte d'une vitesse, elle-même provenant d'un mouvement, il nous faut alors définir ces différents termes.

Premièrement, lorsqu'un disque tourne, il effectue un mouvement de rotation. Un solide est dit en rotation si la trajectoire de tous ses points sont des cercles dont le centre est une même droite, appelée axe de rotation. Puisque nous sommes dans l'espace, qui est en trois dimensions, il y a trois axes de rotation, ce qui implique trois mouvements de rotation possibles, soit trois vitesses de rotation différentes.

Deuxièmement, la vitesse est définie comme le rapport de la distance parcourue en un temps écoulé. La vitesse de rotation est exprimée en radians par seconde, mais plus généralement en tours par minute, puisqu'un angle n'a pas de dimension. On s'intéresse plus particulièrement à la vitesse du disque à un temps T , juste avant qu'il ne soit immobile. On se demande s'il va plus vite avant de s'arrêter. On dispose alors de trois vitesses de rotation différentes. Il faut connaître l'évolution de ces trois vitesses afin de déterminer si le disque accélère ou non.

Troisièmement, l'accélération est la modification de la vitesse par rapport au temps, et plus particulièrement la dérivée de la vitesse par rapport au temps. L'accélération se traduit par des vecteurs. Afin de répondre à notre problématique, on veut savoir si ces vecteurs sont différents du vecteur nul et si c'est le cas, on veut connaître leurs signes. Si un vecteur accélération est positif alors, il y a une augmentation de la vitesse.

Ensuite, afin de savoir si le disque accélère avant de s'arrêter, nous allons étudier le système sous différents points de vue.

D'une part, nous allons l'étudier de façon théorique, en s'attardant sur les formules des différentes vitesses, les mécanismes de dissipation d'énergie mis en jeu, ainsi que les caractéristiques du disque (densité, résistance...) afin de connaître les facteurs de l'accélération ou non, du disque.

D'autre part, nous allons l'étudier de façon expérimentale, à travers différentes expériences et simulations nous permettant de confirmer ou non, nos observations théoriques et ainsi résoudre notre problématique grâce aux données que nous allons traiter, remettre en question et mettre en relation.

Finalement, pour mener à bien ce projet nous avons dû nous organiser et travailler tout au long de ces deux années. Pour cela, nous avons établi un diagramme de GANTT.

(Voir : Figure 17: Diagramme de Gantt illustrant l'avancement du projet ; Figure 2: schéma représentant les axes de rotation)

I - LA THÉORIE.

Il est important de comprendre de façon théorique les forces mises en jeu, les mouvements et vitesses qu'elles entraînent afin de pouvoir expliquer nos observations expérimentales.

1) Les vitesses.

Comme expliqué précédemment, il existe trois vitesses angulaires : la vitesse angulaire ω , la vitesse de précession Ω et la vitesse angulaire α . Ces vitesses sont régies par des lois que nous allons expliquer.

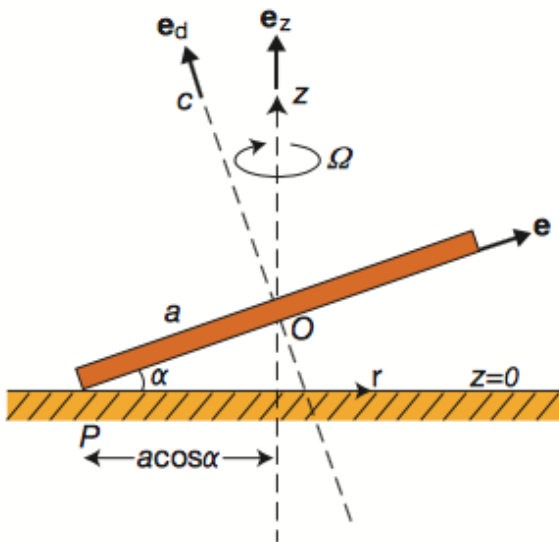


Figure 3: Schéma descriptif du système

Le mouvement du disque en rotation est décrit par 3 vitesses qui varient au fil du temps :

- La vitesse angulaire de précession Ω : elle correspond à la vitesse du point de contact (P) entre le disque et la surface. Ce point, pendant le mouvement total du disque (de son lancement à son arrêt), va décrire une spirale sur la surface qui s'élargit pour atteindre le diamètre du disque. Elle est portée par l'axe e_z .

- La vitesse angulaire ω : elle correspond à la vitesse de rotation d'un point fixe du disque selon l'axe de révolution du disque e_d , ce point fixe du solide va quant à lui, décrire un cercle parfait (dans le référentiel lié au solide) au fil du temps.

- La vitesse α : elle correspond à la variation de l'angle formé par la surface sur lequel le disque tourne (« la table ») et la surface inférieure circulaire plane du disque porté ici par le

vecteur \vec{e} , cet angle alpha est amené au fil du temps à diminuer pour finalement être nul, c'est à dire que les deux surfaces sont en contact.

2) La théorie classique sans frottement.

Afin de comprendre comment évolue chaque vitesse, nous avons simplifié au maximum notre système. Nous n'avons pas pris en compte les frottements dans nos formules. Nous verrons leurs actions par la suite.

Premièrement, afin de déterminer la vitesse de précession, on pose P, le point de contact entre le disque et la surface, ce même point décrit un cercle de vitesse angulaire Ω , et α , l'angle entre la surface inférieure du disque et le support.

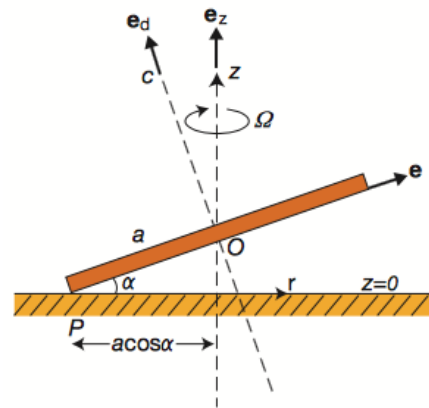


Figure 2 : Schéma descriptif du système

De plus, on sait que l'équation d'Euler pour le mouvement d'un corps rigide est :

$$\frac{dh}{dt} = \Omega \wedge h$$

Avec h le moment angulaire du disque : $h = A\omega e(t)$

Où A est le moment d'inertie du disque tel que $A = \frac{1}{4}Ma^2$ avec M la masse du disque et a son rayon.

Et $e(t)$ est le vecteur unitaire porté par la direction PO.

Ensuite, on sait que l'équation d'Euler pour le mouvement d'un corps rigide peut aussi s'exprimer comme : $\frac{dh}{dt} = \Omega \wedge h = G$ avec $G = Mgae_z \wedge e$.

$$\text{On obtient alors } \Omega^2 \sin \alpha = \frac{4g}{a}.$$

Dans l'approximation des petits angles, que l'on peut faire car nous étudions le disque juste avant son arrêt, on a $\Omega^2 \alpha = \frac{4g}{a}$.

$$\text{Donc } \Omega = \sqrt{\frac{4g}{a \alpha}}.$$

Enfin, on obtient une formule pour la vitesse de précession du disque $\Omega = \sqrt{\frac{4g}{a \sin \alpha}}$ tangente au disque dans le sens horaire, si nous ne tenons pas compte de l'approximation des petits angles.

Deuxièmement, afin de déterminer la vitesse de rotation ω , on sait que l'énergie cinétique s'exprime par :

$$\frac{1}{2}A\omega^2 = \frac{1}{2}Mga \sin \alpha$$

Donc $\omega = -\Omega \sin \alpha$

De plus, l'énergie de mouvement est la somme de l'énergie cinétique

$$\frac{1}{2}A\omega^2 = \frac{1}{2}Mga \sin \alpha, \text{ et de l'énergie potentielle } Mga \sin \alpha, \text{ donc } E = \frac{3}{2}Mga \sin \alpha = \frac{3}{2}Mga\alpha.$$

Enfin, la vitesse angulaire α correspond à la variation de l'angle α .

On comprend facilement que cette vitesse diminue au cours du temps car α diminue.

En outre, dans la théorie classique α est constant, ainsi Ω , ω et E sont constantes. On en déduit alors que le disque ne perd pas d'énergie et que le mouvement continue indéfiniment.

Afin de se représenter plus simplement l'évolution des vitesses, nous avons fait le graphique suivant représentant les vitesses en radian par seconde, en fonction de l'angle α . Ici, nous avons repris la norme des vitesses trouvées, à partir de la théorie classique en les faisant évoluer en fonction de α :

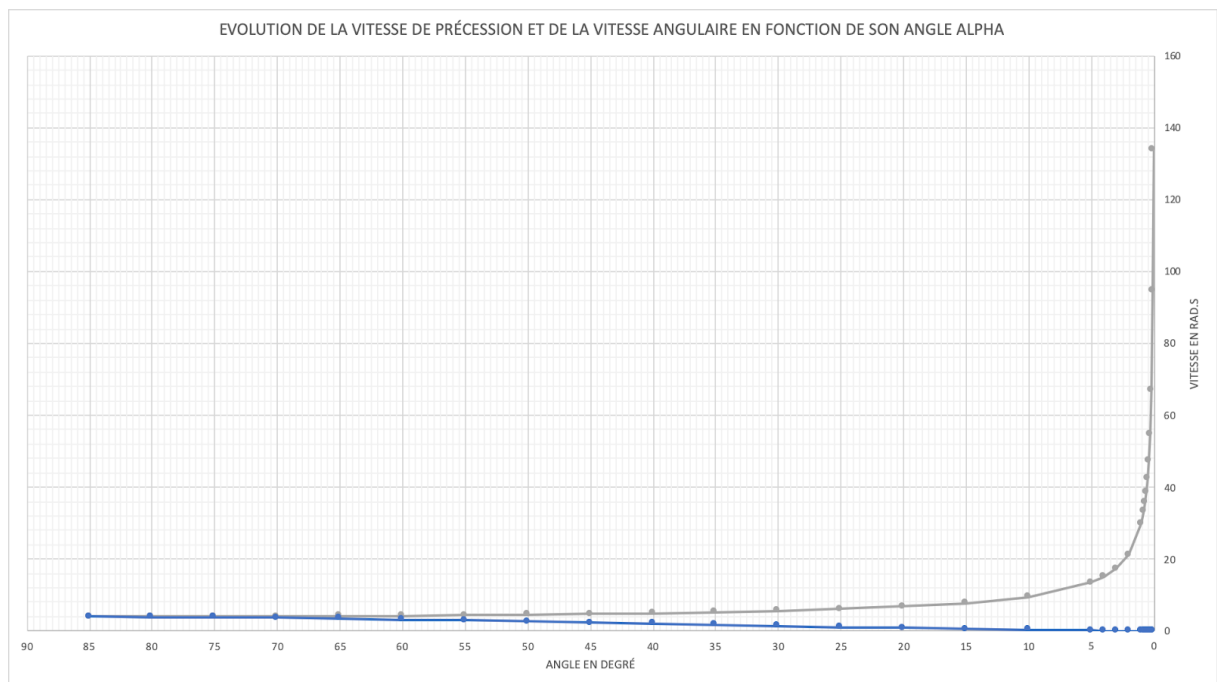


Figure 4: courbes représentatives de l'évolution des vitesses en fonction d'Alpha

Sur ce graphique, on peut voir deux courbes : la courbe bleue représentant la vitesse angulaire et la deuxième représentant la vitesse de précession.

Nous les avons obtenues avec les formules qui ont été simplifiées ci-dessous :

$$\text{Vitesse de précession } \Omega = \sqrt{\frac{4 \times g}{r \times \sin \alpha}}$$

$$\text{Vitesse angulaire } \omega = \sqrt{\frac{4 \times g}{r \times \sin \alpha}} \times \sin \alpha$$

On peut voir grâce à ces courbes que la vitesse angulaire diminue au fur et à mesure que l'angle diminue alors que la vitesse de précession, elle, elle augmente. A leur apogée, la vitesse de précession est bien plus importante que la vitesse angulaire.

Donc, grâce aux expressions des vitesses exprimées sans prendre en compte les mécanismes de dissipation d'énergie, nous avons pu mettre en évidence que le disque devrait tourner indéfiniment. En effet, bien que les vitesses angulaires ω et α diminuent au cours du temps, la vitesse de précession, elle, elle augmente, et si rien ne l'arrête, le disque continuera de tourner. Pour comprendre comment évolue la rotation du disque, il faut donc comprendre comment il perd de l'énergie, ce qui entraîne son arrêt.

3) Les mécanismes de dissipation.

Pour cette partie sur les mécanismes de dissipation, nous n'avons pas les connaissances nécessaires pour démontrer le type de formule qui suivent. En effet, plusieurs grands physiciens se sont déjà penchés sur le problème comme R. I. Leine, H. K. Moffatt, C. Le Saux. Nous nous sommes donc inspirés de leurs recherches et travaux pour cette partie.

On exprimera les frottements par leur moment résistant (moment d'une surface par rapport à un point) qui sont de la forme $\mu \times \lambda \times \text{Sign}(\omega)$ avec μ le coefficient de frottement, λ une force normale au point et $\text{Sign}(\omega)$ le signe (+ ou -) de la vitesse angulaire ω .

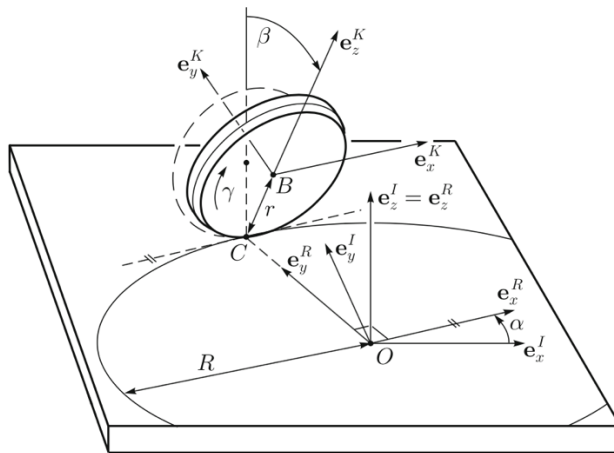


Figure 5 : Schéma des différents repères utiles pour l'explication de l'impact des frottements sur le disque

Ils existent différents mécanismes de dissipation d'un disque qui roule. Tout d'abord, nous allons traiter deux types de frottements liés : celui de roulement et de pivotement et les frottements de glissement du disque sur la table. Nous traiterons enfin les différents modèles liés à la viscosité de l'air.

Le repère K est un repère lié au disque et R est un repère fixe par rapport au sol. Attention dans cette partie, les vitesses angulaires ω et Ω ne correspondent pas à celles de la partie précédente.

A) Frottement classique de roulement.

Deux corps en contact peuvent avoir une résistance de roulement l'un envers l'autre : ici, un point de surface du disque sur la table. Ce type de frottement est appelé frottement de contour. Le roulement est associé à une résistance de la vitesse angulaire des corps en contact qui est tangentielle à la surface de contact. Le frottement de contour et le frottement de roulement classique peuvent être identiques ou différents, selon le type de système. Si l'on considère un disque tridimensionnel roulant sur une table, ces deux types de frottement sont différents :

- Le frottement de roulement.

La loi classique de frottement de roulement, appliquée à un disque qui roule, décrit un moment de frottement dans le plan horizontal de la table en fonction de la projection de la vitesse angulaire sur le plan horizontal. La vitesse angulaire Ω des composantes du disque est :

$$R\omega_x = \omega_x \text{ et } R\omega_y = \omega_y \cos \beta - \omega_z \sin \beta \text{ autour des axes } e_x^R \text{ et } e_y^R.$$

Pour le mouvement du disque qui tourne, nous allons supposer que le moment des frottements autour de l'axe e_x^R est beaucoup plus faible qu'autour de l'axe e_y^R , car le disque est à la phase finale de son mouvement. On obtient alors une loi classique de frottement de roulement (ici autour de l'axe e_y^R) de la forme :

$$M_{roul} \in -\mu_{roul} \lambda_N r \text{Sign}(\omega_{roul})$$

Avec μ_{roul} le coefficient de frottement et ω_{roul} la vitesse angulaire de roulement qui est ici égale à $\omega_{roul} = \Omega \cdot e_y^R = R\omega_y = \omega_y \cos \beta - \omega_z \sin \beta$.

- Le frottement de contour

Le frottement du contour est un moment résistant au mouvement du point de contact C sur le bord du disque. On va considérer une vitesse angulaire du contour $\omega_{cont} = \frac{v_{cont}}{r}$. On obtient alors une loi de frottement de contour :

$$M_{cont} \in -\mu_{cont} \lambda_N r \text{Sign}(\omega_{cont})$$

Où μ_{cont} est un coefficient de frottement sans dimension.

On peut en conclure que les frottements de roulement et de contour font partie des causes de l'arrêt du disque, principalement dans les premières phases de roulement du disque.

B) Frottement de glissement.

Les équations de mouvement ont été dérivées en supposant que le disque roule purement sur la table ($\gamma_{Tx} = \gamma_{Ty} = 0$), c'est-à-dire qu'il n'y a pas de glissement dans la direction e_x^R et e_y^R du point de contact. On conclut donc que le frottement par glissement n'est pas

capable de dissiper l'énergie si le disque est dans un état de mouvement de roulement stationnaire. Or, puisque nous avons pris comme hypothèse que son centre était fixe, nous pouvons dire que le frottement de glissement n'a pas d'influence.

C) Frottement de pivotement.

Le frottement de pivotement est un moment de frottement qui résiste à une vitesse angulaire pivotante ici ω_{pivot} du disque autour du point de contact C. Si la vitesse angulaire de pivotement est importante, un couplage avec frottement de glissement peut apparaître. Ce couple peut être modélisé par la loi de frottement Coulomb-Contensou mais qui n'a aucune importance ici et ne sera pas considérée. En effet, pendant les derniers moments de rotation du disque, ce couple agit très faiblement. Une loi de frottement de pivotement « sec » est de la forme :

$$M_{pivot} \in -\mu_{pivot} \lambda_N r \text{Sign}(\omega_{pivot})$$

Avec la vitesse de pivotement $\omega_{pivot} = I\omega_z = \sin \beta \omega_y + \cos \beta \omega_z$.

Le moment de frottement de pivotement M_{pivot} induit un moment de dissipation généralisé $M_{diss} = M_{pivot} e_z^I = M_{pivot} \sin \beta e_y^K + M_{pivot} \cos \beta e_z^K$.

Les frottements de roulement, de contour et de pivotement font partie des causes de l'arrêt du disque, principalement dans les premières phases de roulement du disque mais interviennent très peu pendant la phase finale, juste avant l'arrêt brutal.

D) La viscosité de l'air.

La viscosité de l'air peut être définie comme la résistance à l'écoulement qui se produit dans la masse d'air. Elle intervient principalement à la fin de la rotation du disque, c'est l'une des causes de son arrêt brutal. Keith Moffatt est l'un des scientifiques ayant travaillé sur l'influence de la viscosité sur le disque d'Euler. Il propose que le mécanisme de dissipation soit dû à la couche d'air entre le disque et la table. A la fin du mouvement, l'inclinaison

$\theta(t) = \frac{\pi}{2} - \beta(t)$ est très petite et l'air est comprimé entre la surface du disque (presque parallèle) et la table. L'écart maximal entre le disque et la table est proportionnel à $\sin \theta \approx \theta$. K. Moffatt suppose que la vitesse horizontale de l'air (u_H) est proportionnelle à la vitesse de précession $\dot{\alpha}$. En supposant que la couche d'air entre le disque et la surface ne « glisse » pas, il en a déduit que la vitesse de la couche d'air était proportionnelle à $\frac{\partial u_H}{\partial z} \propto \dot{\alpha}/\theta$ (où \propto signifie «proportionnel à»). On a alors la viscosité de l'air comme étant linéaire et on obtient que le disque subit un moment $M_{drag} = -c_{drag} \frac{\dot{\alpha}}{\theta}$ autour de l'axe e_z^I .

Le coefficient c_{drag} dépend de la viscosité de l'air et du rayon du disque. Le modèle de la dissipation, dû à la viscosité de l'air, se généralise à $M^{diss} = M_{drag} e_z^I$.

Ce modèle a été complété et étendu par Lars Bildsten, en prenant en considération des valeurs de l'angle θ plus grande. Il soutient que la dissipation due à la viscosité de l'air ne

s'étend pas sur tout l'espace entre le disque et la surface, pour des valeurs d'inclinaison θ grandes. En effet, cette dissipation se produit uniquement dans les couches entre le disque et la surface très extrême (très fine).

La largeur de ces couches extrêmes est proportionnelle à $\delta \propto \dot{\alpha}^{-1/2}$ et le moment subi par le disque est alors $M_{drag} \propto \frac{\dot{\alpha}}{\delta} \propto \dot{\alpha}^{3/2}$.

Donc, pour donner suite à l'étude des différents mécanismes de dissipation d'énergie, nous constatons que les frottements de roulement, de contour et de pivotement jouent un rôle important dans la première phase de l'arrêt du disque, alors que la viscosité de l'air est surtout impliquée dans la phase terminale de l'arrêt du disque. Cela nous mène à voir l'importance des caractéristiques du disque et du support, afin de réduire au maximum les frottements.

4) Les caractéristiques du disque.

Les caractéristiques du disque ont une influence sur la dissipation d'énergie et donc sur la diminution des vitesses. Il est alors important de savoir quelles caractéristiques physiques doit avoir le disque afin qu'il tourne le plus longtemps possible.

Tout d'abord le disque doit avoir une déformation très faible lors de son contact avec la surface pour conserver le plus d'énergie possible lors de sa rotation.

La déformation d'un matériau est caractérisée mécaniquement par sept propriétés du matériau :

- Son élasticité : capacité à se déformer élastiquement et de manière réversible.
- Sa résistance : capacité à résister à la rupture.
- Sa ductilité : capacité à se déformer plastiquement et de manière irréversible.
- Sa ténacité : capacité à résister à la propagation d'une fissure.
- Sa dureté : capacité à résister à la pénétration.
- Sa résilience : capacité à résister à un choc.
- Sa résistance à la fatigue : capacité à résister à de nombreuses sollicitations.

De plus, le matériau doit avoir un certain poids pour résister aux frottements de l'air. Ce critère est lié à la densité du matériau. La densité étant le rapport de la masse d'un solide à la masse d'eau pure, occupant le même volume, à la température de 4°C.

Afin de savoir quel matériau était le plus propice à la fabrication d'un disque d'Euler, nous avons comparé, dans le tableau ci-dessous, l'élasticité et la densité de différents matériaux : les propriétés qui nous semblaient les plus importantes ici. Nous avons alors obtenu le tableau comparatif suivant :

Matériaux	Résistance (MPa)	Densité
Acier	250 à 700	8
Aluminium	90 à 470	2,7
Béton	1,5 à 5	2,0 à 2,6
Fibre de carbone	2500 à 3200	1,8
Bronze	120	8,8
Bois	18 à 32	0,6 à 0,9
Cuivre	40 à 70	7,15
Verre	2500 à 3200	2,5

Figure 6 : Tableau comparatif de la résistance et de la densité de différents matériaux

Nous pouvons voir dans le tableau divers matériaux comme l'acier, le bois ou encore l'aluminium. Nous remarquons que la fibre de carbone et le verre ont la meilleure résistance, comprise entre 2500 et 3200 MPA, suivis par celle de l'acier entre 250 et 700 MPA et de l'aluminium. Cependant la résistance n'est pas le seul critère à prendre en compte. Nous remarquons aussi que seul l'acier possède une densité assez importante, de 8, en effet celle de l'aluminium par exemple n'est que de 2,7.

Donc l'acier est le matériau le plus adapté pour la fabrication d'un disque d'Euler car il possède des caractéristiques lui permettant de diminuer au mieux les pertes d'énergie. De plus, il sera par la suite, chromé et poli pour améliorer son contact avec le support.

Enfin, ce support doit posséder une surface où les frottements seront les plus faibles possibles, donc une surface lisse. Le plus souvent, on choisit un miroir. D'une part, car cette surface correspond aux critères demandés, mais aussi car l'observation du mouvement se fait plus facilement. De plus, en le rendant concave, cela permettra de limiter le déplacement du disque à sa surface et donc de réduire les pertes d'énergie.

Pour conclure, en se basant simplement sur l'aspect théorique du mouvement, nous pouvons dire que, si nous ne prenons pas en compte l'action des frottements et de la viscosité de l'air, le disque devrait tourner indéfiniment. Or dans la réalité, ces mécanismes de dissipation d'énergies sont bien présents et entraînent l'arrêt du disque.

Si l'on s'attarde sur la phase terminale du mouvement, un peu avant son arrêt, nous notons que la vitesse de précession augmente alors que les deux autres vitesses de rotation, α et ω diminuent. Mais nous voyons aussi que l'impact de la viscosité de l'air est de plus en plus important. Cette opposition pourrait expliquer l'arrêt brutal du disque.

Afin de vérifier notre théorie, nous allons étudier le disque à travers différentes expériences.

II - NOS EXPÉRIENCES.

Afin de savoir si le disque accélère avant de s'arrêter, nous avons mis en place différentes expériences afin de mettre en évidence les différentes vitesses, les frottements et leurs conséquences.

Nous allons vous exposer ici, les expériences réalisées et la manière dont ont évolué nos idées par rapport à ces expériences.

1) Expériences liées aux vitesses.

Nous avons tout d'abord, pensé faire trois expériences différentes pour étudier l'évolution des trois vitesses de rotation.

A) 1ère expérience : Vitesse α .

PRÉSENTATION : La mesure de l'angle d'inclinaison est basée sur la réflexion du laser et du disque. Lorsqu'un faisceau laser est dirigé vers un disque avec un angle fixe par rapport au plan horizontal, on peut observer une « ellipse » formée par le faisceau laser sur un écran récepteur.

Cette ellipse est due au mouvement du disque, qui modifie l'angle incident du faisceau laser sur le disque. Puisque l'angle d'inclinaison du disque diminue avec le temps, la taille de l'ellipse diminue en conséquence. La mesure de la taille de l'ellipse, nous donne l'angle d'inclinaison du disque en fonction du temps. Cette expérience est seulement valable en théorie, si le centre du disque reste fixe.

MATÉRIEL : Disque, lanceur, laser, récepteur.

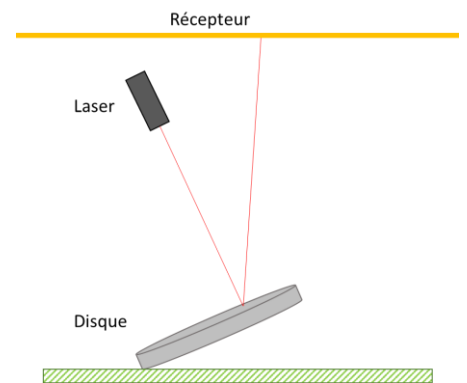


Figure 7: schéma représentant la première expérience

ATTENTES : Nous nous attendons à observer une diminution du rayon de l'ellipse, jusqu'à son centre, ce qui signifierait que l'angle α serait nul. De plus, nous devrions observer que le rayon se rétrécit de plus en plus lentement, ce qui traduirait la diminution de la vitesse angulaire α , jusqu'à son arrêt.

B) 2ième expérience : Vitesse de précession Ω .

PRÉSENTATION : Pour mesurer la vitesse de précession, on place un faisceau laser horizontalement devant la table de manière à ce que le faisceau effleure la table et un récepteur en face, le disque se trouvant entre eux. Pendant le mouvement de rotation du disque, le faisceau laser est intercepté, ce qui entraîne une coupure rapide de l'intensité lumineuse transmise au récepteur. Une telle extinction de lumière se produit deux fois lors d'une rotation du disque. On calcule la durée T entre chaque interruption (tous les 180°).

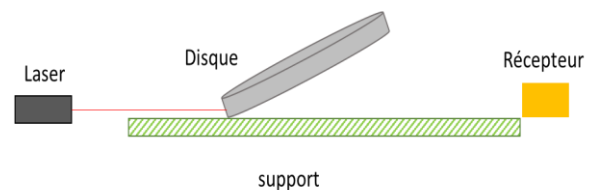


Figure 8 : Schéma représentant la deuxième expérience

Notons que cette durée correspond à la moitié d'une période. On obtient ensuite la vitesse de précession ($180^\circ/T$). Cette expérience est seulement valable en théorie, si le centre du disque reste fixe.

MATÉRIEL : Disque, lanceur, laser, récepteur.

ATTENTES : Nous nous attendons à observer une diminution de la durée T , ce qui traduirait l'accélération de la vitesse de précession.

C) 3^{ème} expérience : Vitesse ω .

PRÉSENTATION : On mesure la vitesse angulaire du disque en enregistrant le mouvement d'une marque située sur la face supérieure du disque. La position angulaire puis la vitesse angulaire sont calculées à partir du déplacement de la marque entre deux images consécutives. On traite ces résultats grâce au logiciel Tracker.

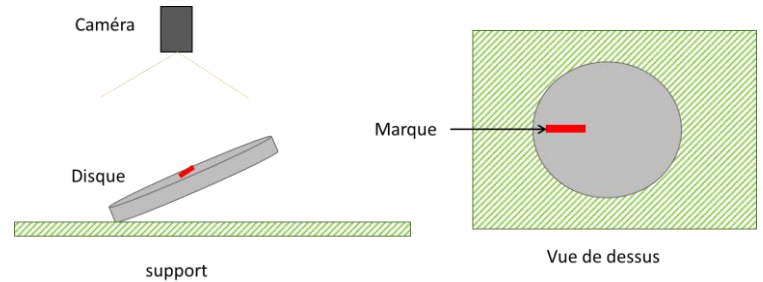


Figure 9 : Schéma représentant la troisième expérience

MATÉRIEL : disque, lanceur, Tracker, caméra.

ATTENTES : Nous nous attendons à observer le ralentissement du mouvement de la marque, soit la diminution de la vitesse ω .

Nous avons ensuite compris qu'une seule manipulation suffisait pour avoir l'évolution des trois vitesses. Nous avons donc voulu réaliser l'expérience suivante :

D) Expérience réalisée.

PRÉSENTATION : L'expérience consiste à faire tourner un disque sur une surface plane et à observer l'évolution des trois paramètres dynamiques correspondant aux 3 vitesses, à l'aide d'un système vidéo à grande vitesse.

Nous choisissons pour notre test expérimental, deux matériaux différents : l'aluminium qui a une résistance correcte mais une densité faible et l'acier qui a une bonne résistance et une bonne densité. Afin d'avoir des lancers similaires, nous créons et imprimons un lanceur de disque sur mesure. Nous effectuons plusieurs lancers des deux disques. Sur chacun des disques est collé un QR code, de taille 20mm par 20mm, avec le dictionnaire 4x4 et le marqueur ID 2 (Voir : Figure 23 : Photo de la réalisation de l'expérience). On filme chacun des lancers. Ensuite, grâce au logiciel Aruco, on relève les positions du QR code par image, avec lesquelles on va calculer les vitesses. Nous devons utiliser une caméra très précise capable d'enregistrer énormément d'images par seconde.

Afin de pouvoir comparer les vitesses avec frottements et sans frottement, on place le lanceur et le disque sous vide (sous une cloche) et on effectue les mêmes lancers que précédemment.

MATÉRIEL : Disques de différents matériaux, lanceur, caméra, logiciel ARUCO, QR-Code, cloche sous-vide.

RÉSULTATS ATTENDUS : Nous nous attendons à ce que le disque en aluminium s'arrête en premier puis celui en acier. Cela nous permettra d'illustrer l'importance des caractéristiques du matériau (densité, résistance...). De plus, après étude des différentes vitesses, nous nous attendons à constater l'accélération de la vitesse de précession, mais le ralentissement des vitesses angulaires α et ω .

Il est important de noter nous n'avons pas pu réaliser à la lettre cette expérience, par suite du confinement. En effet, puisque nous nous sommes divisés les tâches, c'est une personne qui s'est occupée de la fabrication du lanceur et une autre qui s'est occupée des disques, donc ce n'était pas la même personne qui avait les disques et le lanceur. De plus, nous ne possédions pas de cloche afin de faire l'expérience sous vide. Nous nous sommes donc adaptés à la situation, en effectuant les lancers à la main sur un miroir, ce qui est bien moins précis, et nous avons filmé avec un téléphone portable qui s'avère avoir une précision inférieure à celle désirée, mais suffisante. Puis, nous avons récupéré les données, différentes de celles que nous pensions avoir, 3 orientations Roll, Pitch, Yaw, ainsi que trois positions x, y, z.

Nous allons maintenant expliquer comment nous avons réalisé le lanceur et les disques.

Lanceur de disque.

Afin de réaliser cette expérience nous avons dû auparavant créer le lanceur de disque.

Il est important de faire ce lanceur afin de réaliser les expériences de façon similaire et les plus justes possibles, ce qui ne serait pas possible si nous faisons tourner le disque de façon manuelle. Or, comme expliqué précédemment, nous avons réalisé les expériences sans le lanceur de disque, donc nous avons dû prendre en compte ce manque de précision. En outre, le lanceur a bien été imprimé comme vous pouvez le voir sur la photo ci-contre.
(Ou voir : *Figure 19 : Seconde photo du lanceur de disque, vue de dessous*)



Figure 10 : Première photo du lanceur de disque

Nous l'avons modélisé avec le logiciel CATIA, pour ensuite pouvoir l'imprimer en 3D. A travers les différents dessins d'ensemble, nous pouvons voir l'évolution de la conception du lanceur.

(Voir : *Figure 20 : Premier dessin d'ensemble du lanceur ;*

Figure 21 : Deuxième dessin d'ensemble du lanceur ; Figure 22 : Dernier dessin d'ensemble du lanceur)

PRÉSENTATION :

Lanceur : partie cylindrique percée en bas, permettant d'encastrier un disque, de diamètre 5 cm et de largeur 0.5 cm. A son sommet se trouve une surface circulaire, concave sur son bord, permettant à un fil d'être soutenu dans cette concavité. En son centre se trouve un écrou accroché à une tige filetée qui permettra l'ascension de la pièce lors de sa rotation, afin de libérer le disque. Le centre du lanceur est percé, ce trou se prolonge dans le cylindre ce qui laissera la place à la tige filetée lorsque la pièce montera, ainsi que l'insertion de l'écrou.

Ensemble : un premier support permet de maintenir la tige filetée de façon verticale, au bout de celle-ci, est vissé le lanceur. A l'intérieur du lanceur se trouve une partie du disque, ce dernier est posé sur un support. Un second support permet de soutenir un poids attaché à un fil, lui-même attaché et enroulé autour de la partie circulaire, se situant au sommet du lanceur.

MATÉRIEL : Logiciel CATIA, imprimante 3D

RÉSULTAT ATTENDU : lorsque le poids est lâché, le fil permet de mettre en rotation le lanceur, qui va alors monter le long de la tige et ainsi libérer le disque, tout en ayant préalablement transmis son mouvement de rotation au disque.

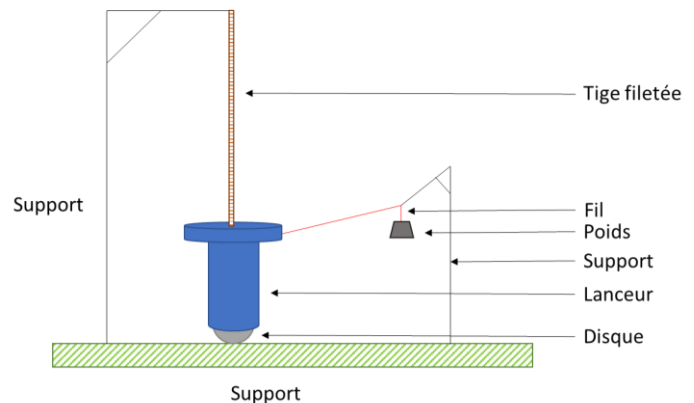


Figure 11 : Schéma du montage

Fabrication des disques.

Afin d'avoir des disques de même taille pouvant s'adapter au lanceur, nous avons fabriqué deux disques de même diamètre 49.5mm et de même hauteur 4.9mm, un en aluminium et un en acier (Voir : Figure 24 : Photos des disques, à gauche celui en aluminium et à droite celui en acier).

Tout d'abord pour le disque en aluminium nous avons demandé à un contact de le faire, nous avons de plus, pu assister à la fabrication.

Il a utilisé un tour d'usinage (Voir : Figure 26 : Schéma définissant un tour d'usinage ; Figure 25 : Photos de la fabrication des disques) qui est une machine qui permet de faire des pièces mécaniques de révolution (cylindrique) en enlevant des copeaux à un bloc de matière brute, qui est un cylindre de diamètre 60 mm. Plus précisément, un tour permet de faire tourner une pièce sur elle-même, afin de la travailler avec un outil de coupe (ici à dresser, c'est-à-dire travailler le contour et à tronçonner, c'est-à-dire travailler les extrémités). Un outil de coupe est un outil qui a une résistance mécanique supérieure à celle de la matière brute, il permet d'enlever des épaisseurs de matières au bloc brut.

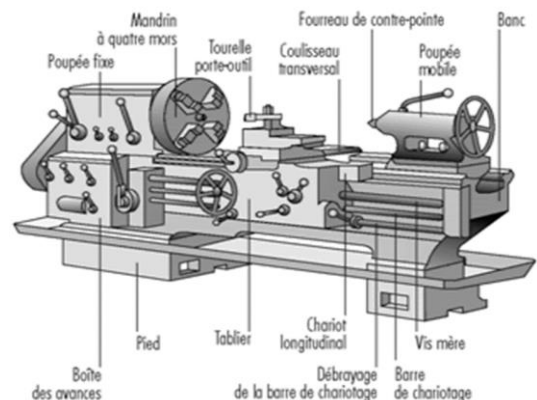


Figure 12: Schéma définissant un tour d'usinage

Premièrement, on va faire en sorte d'avoir le bon diamètre. Pour cela, on monte l'outil à dresser sur le chariot et on règle la position de l'outil pour qu'il arrive au centre de la pièce. Pour ce faire, on utilise la contre-pointe qui permet de placer l'outil exactement au centre de la pièce. Ensuite, on place le brut (le cylindre de matière brute) dans les mors, on serre les mors afin que le brut ne tombe pas. On commence alors l'usinage, tout d'abord on tangente l'outil à la pièce : c'est-à-dire que l'on se rapproche de la face de la pièce (la base du cylindre) le plus possible avec l'outil en enlevant une très légère couche de matière. Puis avec le charriot, on règle l'épaisseur à enlever et on fait une première passe (dressage de la face).

Ensuite, on tangente l'outil sur le diamètre brut et on règle l'outil pour enlever une épaisseur sur le diamètre. On fait une première passe (dressage du diamètre). Avec un pied à coulisse, on contrôle le nouveau diamètre et on effectue plusieurs passes jusqu'à arriver au diamètre voulu. Entre chaque passe, on contrôle toujours le diamètre avec le pied à coulisse.

Deuxièmement, on va faire en sorte d'avoir la bonne largeur de disque. Pour cela, on monte et on règle l'outil à tronçonner de la même manière que pour l'outil à dresser. On règle l'épaisseur (hauteur du cylindre) de la pièce à tronçonner avec le chariot, (ici pour avoir 4.9 mm on a coupé 10 mm). On contrôle l'épaisseur de la pièce avec un pied à coulisse. Enfin, on met la pièce dans les mors, on tangente l'outil avec la pièce et on fait les passes jusqu'à arriver à l'épaisseur voulue.

Finalement, pour la fabrication de la pièce en acier, nous avons demandé à la Société Reynard Constructeur, située à Courpière. Nous n'avons pas pu assister à la réalisation de la pièce mais le procédé utilisé doit être similaire.

Nous avons ainsi pu avoir deux disques de même dimension mais de matériaux différents ce qui nous a permis de comparer les résultats selon les propriétés des matériaux.

Les résultats obtenus.

Bien que nous n'ayons pas pu réaliser l'expérience voulue, nous avons obtenu des résultats similaires pour chaque disque, seule une petite partie est représentée ci-dessous. Les 3 premières colonnes correspondent aux angles d'Euler et les trois dernières aux positions du centre du disque dans le repère fixe, lié à la caméra.

n°image	orientation du vecteur au centre de la pièce			position du centre de la pièce		
	x	y	z	x	y	z
0	-1.27139	-2.451	1.06341	0.143777	-0.230968	0.870127
1	-1.19644	-2.45348	1.24967	0.146434	-0.236841	0.885822
2	-1.0686	-2.54762	1.55066	0.148008	-0.240796	0.894298
3	0.907668	2.45147	-1.5435	0.150359	-0.242768	0.895364
4	0.802998	2.36222	-1.51564	0.146879	-0.241496	0.890712
5	-0.568155	-3.07473	1.74705	0.15424	-0.251911	0.922705
6	0.331733	2.31498	-1.24823	0.144611	-0.237008	0.866749
7	0.212311	2.33348	-1.17169	0.141112	-0.230926	0.84322
8	0.164325	2.3634	-1.02936	0.148319	-0.244591	0.891812
9	-0.0730409	2.54692	-0.584066	0.139725	-0.227339	0.839553
10	-0.125085	2.60725	-0.483564	0.13834	-0.226597	0.836938
11	-0.147884	2.69234	-0.410372	0.136975	-0.223421	0.828802
12	-0.161365	2.7826	-0.330004	0.135897	-0.223353	0.828639
13	-0.230999	2.91953	-0.289636	0.122725	-0.202046	0.752635

Figure 13 : Tableau regroupant les résultats de l'expérience sur les vitesses

Nous avons alors calculé les matrices de rotation, qui permettent de passer d'un repère à l'autre lorsque celui-ci bouge d'un certain angle, correspondant aux angles d'Euler. Nous avons obtenu cela :

Soit les repères :

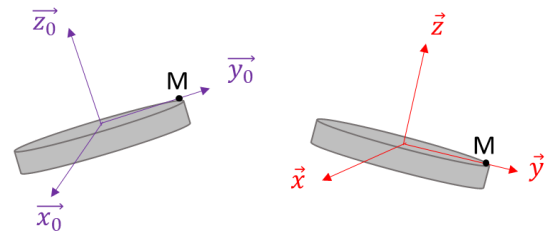
$$R0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$$

$$R1 = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$$

$$R2 = (\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$$

$$R = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

Ils sont liés au solide en son centre, tels que :



On a alors les matrices de rotation :

$$R(\Psi/\vec{z}_0) = \begin{bmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(\theta/\vec{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R(\varphi/\vec{z}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

On peut ensuite obtenir la vitesse instantanée de rotation :

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}(R/R0) &= \vec{\Omega}(R/R2) + \vec{\Omega}(R2/R1) + \vec{\Omega}(R1/R0) \\ &= \dot{\varphi} \vec{z} + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\Psi} \vec{z}_0 \end{aligned}$$

Dans le repère R on obtient :

$$\vec{\Omega}(R/R0) = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \varphi - \dot{\Psi} \sin \theta \sin \varphi \\ -\dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\Psi} \sin \theta \cos \varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\Psi} \cos \theta \end{pmatrix}$$

Nous avons donc l'expression de la vitesse instantanée de rotation, en fonction des angles d'Euler. Or, nous n'avons pas réussi à trouver la vitesse du disque dans nos calculs.

En effet, cette vitesse est liée au disque, mais nos vitesses sont exprimées en fonction de l'angle α , entre le disque et le support, de sommet P, le point de contact entre le disque et le support.

Donc, avec les données que nous avons, nous pouvons exprimer la vitesse instantanée de rotation, celle-ci est liée au disque. Pour avoir la vitesse du disque par rapport à un repère fixe extérieur, il faudrait pouvoir exprimer l'angle α à partir des angles d'Euler, or nous n'avons pas réussi à faire cela.

Nous ne pouvons donc pas conclure à partir de cette expérience, l'expression des vitesses.

Autres expériences réalisées à la suite de l'impossibilité de conclure.

Afin de voir si les caractéristiques du disque avaient vraiment une influence sur la durée de rotation, nous avons lancé 10 fois, chaque disque en mesurant leur temps de rotation. Nous en avons ensuite fait la moyenne. Or, par manque de précision dans les lancers manuels, les moyennes obtenues ne permettaient pas de conclure sur l'influence des caractéristiques des disques par rapport aux vitesses.

Enfin, dans le but de voir plus simplement l'impact du matériau utilisé sur le temps de rotation, nous imaginons faire tourner un disque en polystyrène assez dense, puis comparer son temps de rotation avec celui de l'acier. Le temps de rotation de celui en polystyrène serait quasiment nul, alors que celui en acier est compris entre 4 et 8 secondes.

Nous avons donc conclu, que plus le disque a une densité et une résistance importantes ainsi qu'une déformation faible, plus il tourne longtemps.

2) Frottements.

Nous savons qu'en théorie la vitesse diminuait, ce qui est illustré par une perte d'énergie. De plus, nous avons mis en évidence que cela était, en grande partie, dû aux frottements du disque avec le support mais aussi avec l'air.

En effet, le disque qui tourne ne le fait pas infiniment, il s'arrête. Effectivement, son mouvement est ralenti puis arrêté par les forces de frottements. Une force de frottement est une force créée par l'interaction de deux surfaces qui glissent l'une par rapport à l'autre et qui s'opposent au mouvement. Il existe deux types de frottements, le frottement statique qui empêche un objet de se mettre en mouvement et le frottement cinétique qui est présent lorsqu'un objet est en mouvement sur un autre objet ou fluide.

Dans le cas du disque, on ne s'intéresse pas au frottement statique car le disque est déjà en mouvement. Lorsque deux surfaces sont en contact, la force de frottement, qui interagit, dépend du coefficient de frottement cinétique, qui lui-même dépend du matériau des surfaces.

Prenons l'exemple d'un disque en acier chromé, qui est en mouvement sur un miroir. Le coefficient de frottement est plutôt faible et donc la force de frottement aussi. Cependant, cela entraîne quand même l'arrêt du disque.

Afin d'illustrer les frottements, nous avons utilisé le logiciel MOSIM dans le but d'effectuer des simulations pour étudier l'enjeu des frottements sur un objet en mouvement. Nous avons décidé d'étudier le cas d'un pendule simple que nous avons mis en mouvement, tout d'abord avec des forces de frottement, puis sans force de frottement, ces forces ne représentant aucun frottement en particulier.

Nous avons choisi de faire la modélisation d'un pendule car nous n'avions pas les connaissances suffisantes pour faire celle du mouvement du disque d'Euler.

Voici comment nous avons simulé le mouvement d'un pendule simple avec le logiciel MOSIM :

1. Tout d'abord, nous avons créé un objet virtuel : un cube. C'est un objet qui reste immobile. Nous l'avons placé au point de l'espace dont les coordonnées $(x, y, z) = (0, 0, 1)$.
2. Puis nous avons créé une sphère de rayon 0.05m et de poids 1kg.
3. Nous avons ajouté un connecteur à chacun des deux objets. Les connecteurs sont des points d'ancrage, où l'on peut, par la suite, mettre une liaison par exemple. Le but étant que la sphère oscille autour du cube qui est fixe.
4. Nous avons ensuite ajouté une liaison entre la sphère et l'objet virtuel, plus précisément entre les deux connecteurs. Cette liaison mesure 0.5 m. La liaison a des coordonnées selon x et selon z, pour que le mouvement soit bien une oscillation.
5. Enfin, nous avons ajouté un deuxième connecteur sur la sphère afin d'appliquer des forces de frottements.
6. De la même manière que nous avons ajouté une liaison entre les deux objets, on a également ajouté une force de frottement au deuxième connecteur de la sphère.

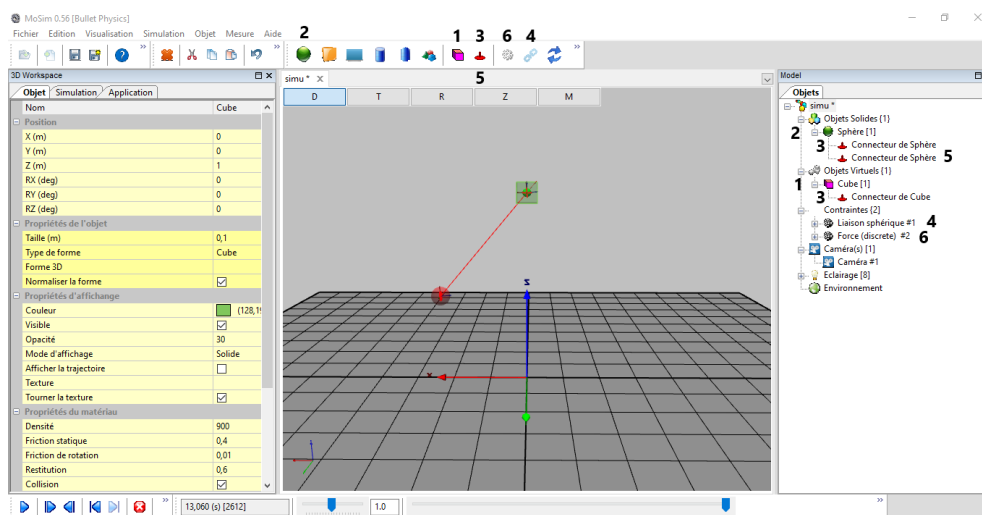


Figure 14 : Capture d'écran lors de la simulation des frottements avec le logiciel MOSIM

Nous avons ensuite mis le pendule en mouvement. Le logiciel relève automatiquement les vitesses sur les axes x et z. Cependant, le mouvement du pendule est ralenti par les frottements mais de manière très subtile. Ainsi, la simulation est très longue, 220 secondes avant que le pendule ne s'arrête complètement.

On a pu s'apercevoir, en relevant les données numériques du logiciel, que lorsque l'on ajoute des frottements le pendule ralenti.

Temps (s)	Vx	Vy	Vz	V
0	0	0	0	0
1	-0,64764	0	-0,551533	0,850662
2	1,34427	0	-0,72288	1,52631
3	-1,88764	0	-0,359073	1,92149
4	1,90805	0	0,294922	1,93071
5	-1,38953	0	0,689403	1,55115
10	-1,80259	0	-0,367486	1,83966
20	0,570733	0	0,430893	0,715126
30	1,49052	0	-0,441545	1,55455
40	-0,457548	0	0,310572	0,552996
60	-0,135235	0	-0,0862395	0,160393
80	0,982675	0	-0,330318	1,03671
100	-1,11234	0	0,186342	1,12784
120	-0,045717	0	-0,0202929	0,0500185
140	0,982006	0	-0,0388696	0,982775
160	-0,0953674	0	0,0336984	0,101146
180	-0,807494	0	-0,00382768	0,807503
200	-0,123574	0	-0,0347792	0,128375
220	0	0	0	0

Figure 15 : Tableau relevant les coordonnées de la vitesse du pendule en fonction des axes

Graphique de la vitesse du pendule en fonction du temps

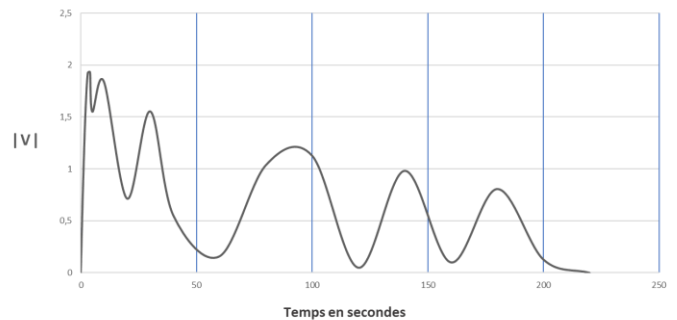


Figure 16 : Courbe représentant la norme de la vitesse du pendule en fonction du temps

Dans le tableau certaines vitesses sont négatives. Cela s'explique par le fait que le logiciel relève les vitesses en fonction de l'axe des x et de l'axe des z, donc lorsque la sphère oscille à gauche, cela relève une vitesse négative.

Pour déterminer la vitesse moyenne, nous avons rentré les données dans un tableur, puis on a effectué la formule suivante : $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$. Or comme Vy est nul, nous avons appliqué : $V = \sqrt{V_x^2 + V_z^2}$.

En faisant un graphique de la vitesse en fonction du temps, on se rend compte que la vitesse diminue, même si elle ne diminue pas strictement. Effectivement, on peut expliquer cette oscillation par le fait qu'une fois que la sphère ait atteint son point le plus haut, elle redescend et sa vitesse augmente. Or, au bout de 225 minutes on remarque que la vitesse est nulle.

Cependant, lorsqu'il n'y a pas de frottement, la sphère ne s'arrête pas d'osciller.

Pour conclure, cette simulation nous a permis de voir l'importance des frottements dans l'arrêt du disque, donc de confirmer nos hypothèses, mais aussi d'avoir une première approche du matériel et de la réalisation des simulations, quelque chose de totalement nouveau pour nous.

De manière générale, nos expériences ne nous ont pas permis de conclure quant à l'augmentation de la vitesse de précession Ω et à la diminution des vitesses de rotations α et ω . Mais elles ont permis de mettre en évidence l'action des forces de frottements sur l'arrêt du disque. Celles-ci jouent un rôle de frein sur les vitesses. De plus, nous avons aussi approché l'hypothèse que les caractéristiques du disque ont une incidence sur sa durée de rotation.

Conclusion.

Dans ce rapport, nous avons exposé nos différentes recherches sur le disque d'Euler. Notre travail, sur deux ans, s'est effectué en trois phases.

Premièrement, une phase théorique qui nous a permis de comprendre les équations et les évolutions des vitesses, ainsi que l'impact des frottements et des matériaux.

Deuxièmement, une phase de simulation où nous avons utilisé plusieurs logiciels pour pouvoir simuler et analyser l'évolution des vitesses, mais aussi l'impact des frottements sur un objet, à travers la simulation d'un pendule.

Enfin, une phase expérimentale où nous avons étudié le mouvement des différents disques afin de pouvoir déterminer ses vitesses, connaître leurs évolutions, pour ensuite comparer ces résultats avec la théorie et les simulations. Bien que nous n'ayons pas pu réaliser les expériences comme nous le souhaitions, par suite du confinement, et que nous n'ayons pas réussi à interpréter correctement nos résultats, cela nous a, tout de même, permis d'avoir une approche expérimentale du problème. En effet, nous avons imaginé des expériences, résolu certains problèmes rencontrés, créé les pièces voulues et contacter des personnes afin de nous aider dans ces réalisations. De plus, cette démarche nous a aussi permis de voir à l'œil nu, si nos recherches semblaient concorder avec nos observations.

Nous pouvons donc conclure grâce à ces trois phases de travail que les vitesses angulaires α et ω diminuent au fil du temps. A contrario, de la vitesse angulaire de précession Ω qui augmente jusqu'à s'arrêter brutalement à la fin.

Par ailleurs, les frottements de roulement, de contour et de pivotement font partie des causes de l'arrêt du disque, principalement dans les premières phases de roulement du disque. A l'heure d'aujourd'hui, les scientifiques s'accordent à dire que la cause de l'arrêt brutal du disque à la fin de sa rotation est due majoritairement à la viscosité de l'air.

De plus, nous avons vu que le choix des matériaux est très important, car il a un impact direct sur le temps de rotation du disque. Par exemple, s'il a une densité faible, le disque sera freiné très facilement par les frottements de l'air.

De façon générale, afin de conclure sur le problème posé, qui était de savoir si le disque d'Euler accélérerait avant de s'arrêter, nous pouvons dire que oui, la vitesse de précession accélère. Cependant les deux autres vitesses qui constituent le mouvement du disque, elles, diminuent. De plus l'effet d'optique, à la fin de la rotation, qui nous pousse à voir l'accélération du disque, peut s'expliquer par l'augmentation de la vitesse de précession mise en opposition avec l'augmentation de la viscosité de l'air. Cela entraîne aussi une sorte de lévitation du disque, ainsi que l'émission d'un son de plus en plus aigu. Enfin, l'arrêt brutal s'explique par la supériorité de la force de frein, exercée par la viscosité de l'air par rapport à l'accélération de la vitesse de précession.

Afin de pouvoir avoir plus d'ouverture sur les possibilités que nous offrent ce projet, nous pouvons faire un rapprochement avec un phénomène similaire, qui est le redressement d'un œuf dur quand on lui fournit une certaine énergie (cinétique) de rotation. Si la vitesse de rotation de l'œuf est trop faible, l'œuf ne tournera qu'en position horizontale, car il n'aura pas réussi à vaincre la gravité.

Cependant, si nous lui fournissons assez d'énergie, il se relève, car son énergie (cinétique) de rotation debout et moins importante que son énergie de rotation coucher, et sa surface de contact avec le support est moins importante, ce qui réduit les frottements. L'œuf retombera quand sa vitesse diminuera.

Nous pouvons remarquer que le disque d'Euler accélère au fur et à mesure de sa rotation lorsque que son angle avec la surface diminue. Au contraire, l'œuf accélère quand son angle avec la surface augmente, sa vitesse maximale sera donc atteinte lorsqu'il fera un angle droit avec la surface.

Enfin, ce projet a été une véritable expérience de travail en collaboration, qui nous a appris à répartir correctement les tâches, à synchroniser notre travail, ainsi qu'à renforcer l'esprit de partage des connaissances.

Annexes :

Untitled Gantt Project

3 mai 2020

Diagramme de Gantt

4

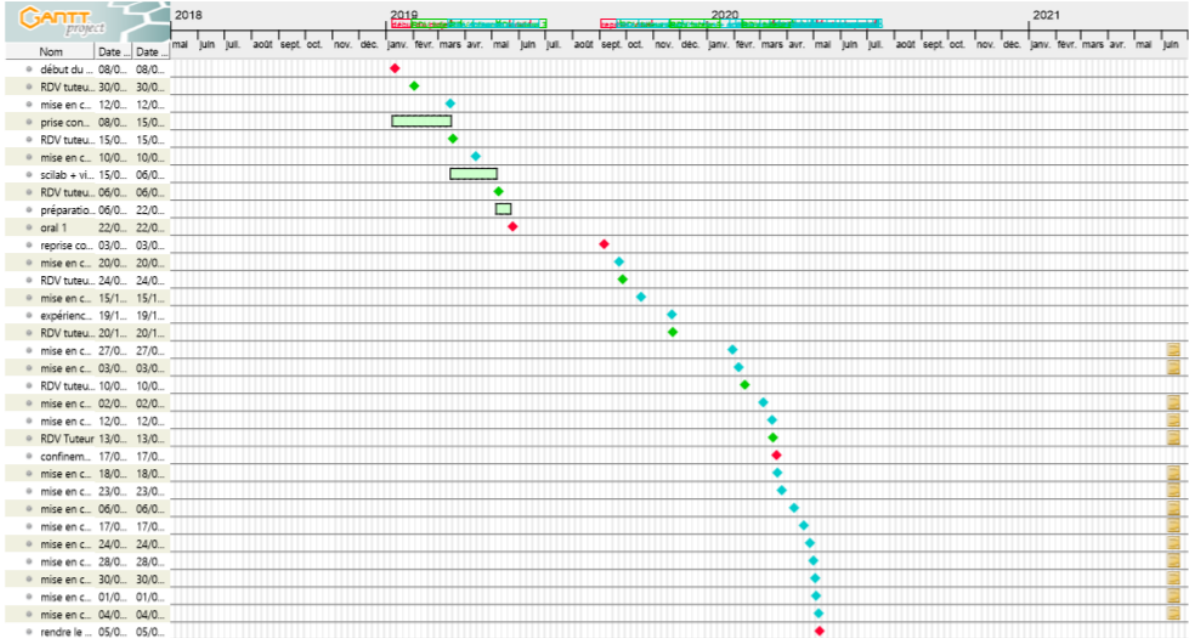


Figure 17: Diagramme de Gantt illustrant l'avancement du projet

Untitled Gantt Project

3 mai 2020

Tâches

2

Nom	Date de début	Date de fin
début du projet	08/01/19	08/01/19
RDV tuteur 1	30/01/19	30/01/19
mise en commun	12/03/19	12/03/19
prise connaissance sujet + questions	08/01/19	15/03/19
RDV tuteur 2	15/03/19	15/03/19
mise en commun	10/04/19	10/04/19
scilab + vitesses	15/03/19	06/05/19
RDV tuteur 3	06/05/19	06/05/19
préparation oral (diapo + texte)	06/05/19	22/05/19
oral 1	22/05/19	22/05/19
reprise cours	03/09/19	03/09/19
mise en commun	20/09/19	20/09/19
RDV tuteur 4	24/09/19	24/09/19
mise en commun	15/10/19	15/10/19
expériences + écrit	19/11/19	19/11/19
RDV tuteur 5	20/11/19	20/11/19
mise en commun	27/01/20	27/01/20
disque intro théories catia lanceur		
mise en commun	03/02/20	03/02/20
protocole écrit théories catia		
RDV tuteur 6	10/02/20	10/02/20
mise en commun	02/03/20	02/03/20
Préparation expérience écrit vitesses théories		

Nom	Date de début	Date de fin
mise en commun Les disques fabrication vitesses écrit simulation formules	12/03/20	12/03/20
RDV Tuteur surtout par rapport à ARUCO	13/03/20	13/03/20
confinement	17/03/20	17/03/20
mise en commun expérience filmée écrit : résumés frottements, vitesses	18/03/20	18/03/20
mise en commun écrit : page de garde, tout réunir, remerciements finir théorie	23/03/20	23/03/20
mise en commun écrit rajouter les dernières recherches expérience	06/04/20	06/04/20
mise en commun expérience : matrice de rotation, vitesse début diapo	17/04/20	17/04/20
mise en commun écrit oral	24/04/20	24/04/20
mise en commun oral	28/04/20	28/04/20
mise en commun écrit : mise en page diapo : mise en page	30/04/20	30/04/20
mise en commun Ecrit : finitions Oral	01/05/20	01/05/20
mise en commun Dernières modifications	04/05/20	04/05/20
rendre le projet	05/05/20	05/05/20

Figure 18: Description de l'avancement



Figure 19 : Seconde photo du lanceur de disque, vue de dessous

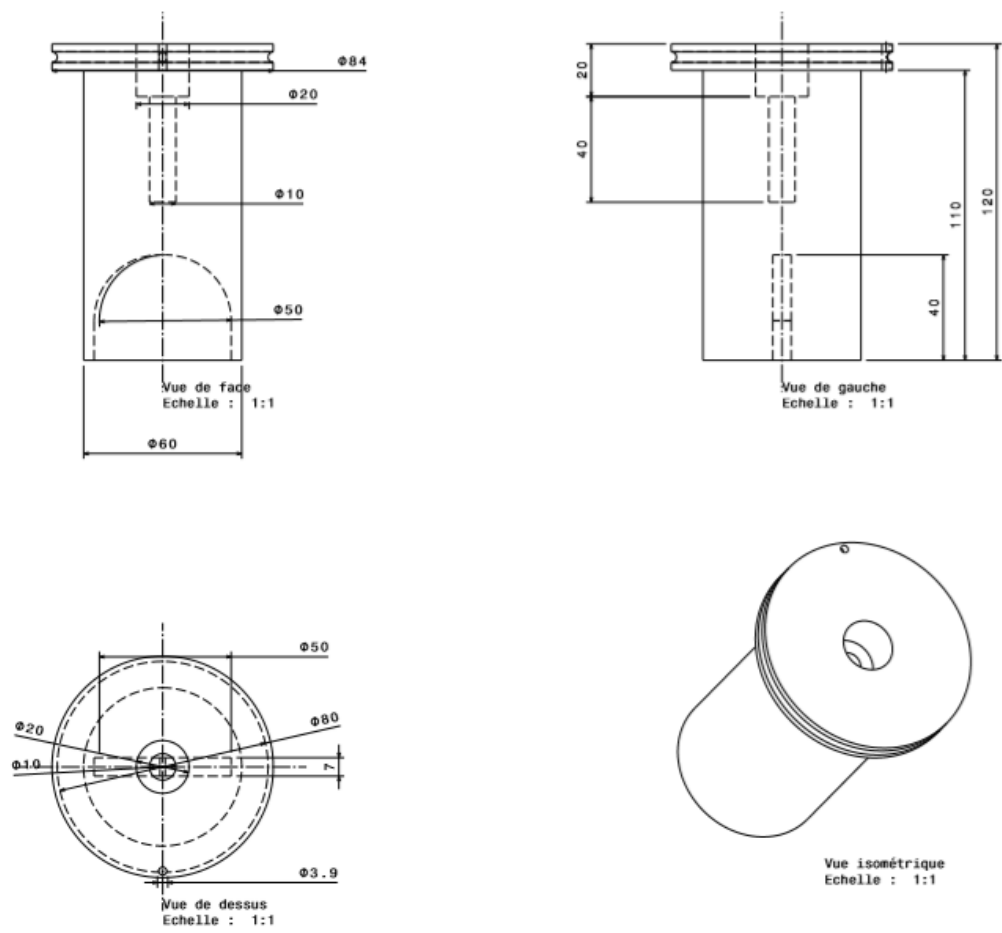


Figure 20 : Premier dessin d'ensemble du lanceur

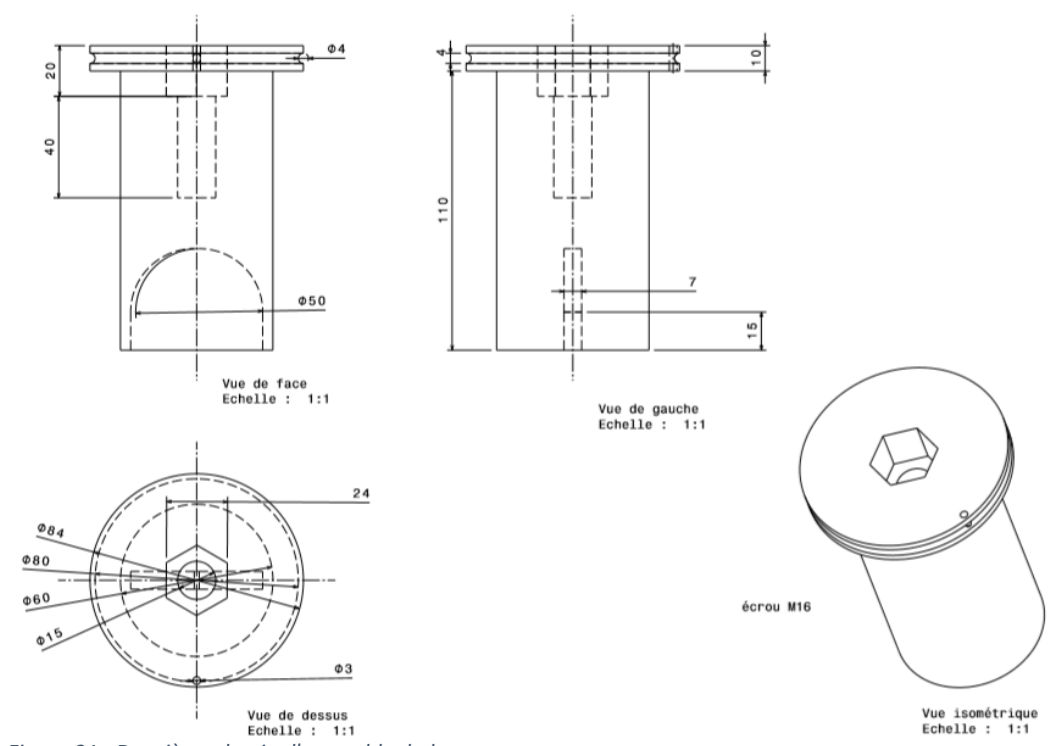


Figure 21 : Deuxième dessin d'ensemble du lanceur

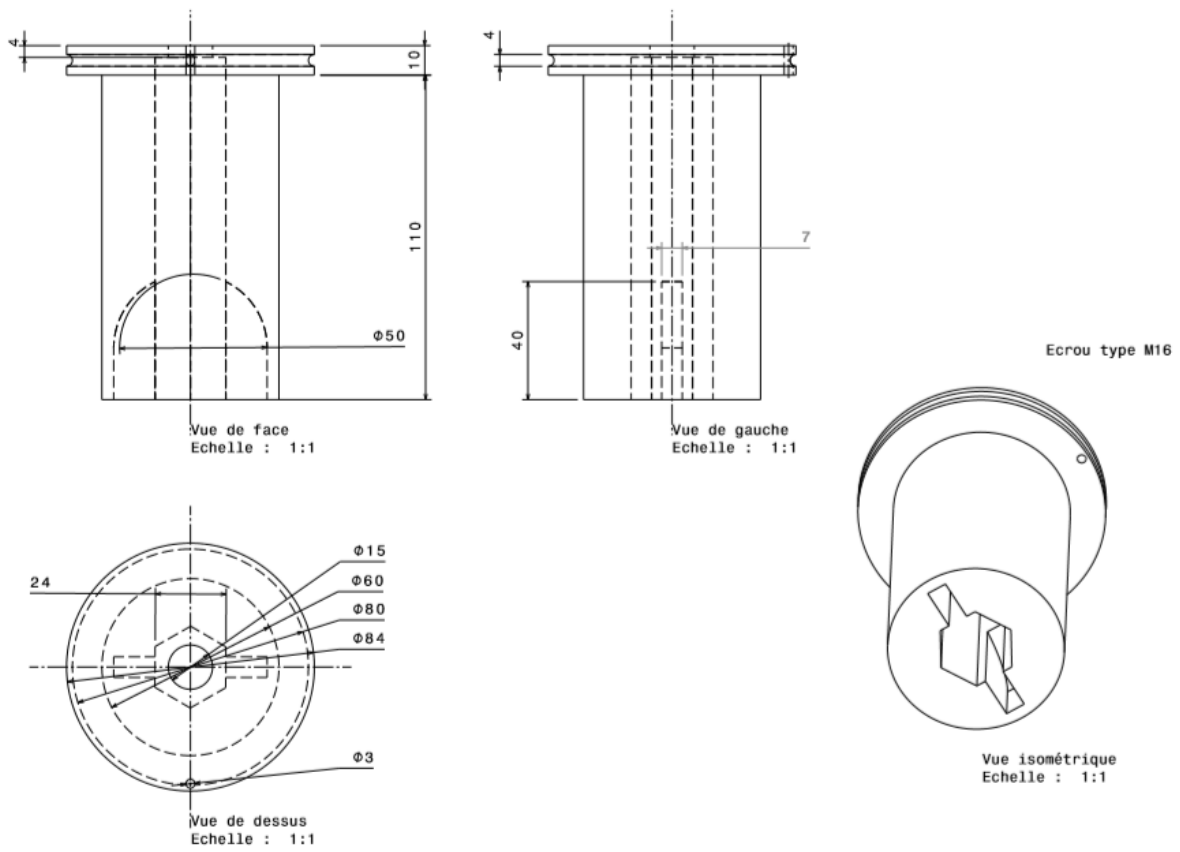


Figure 22 : Dernier dessin d'ensemble du lanceur

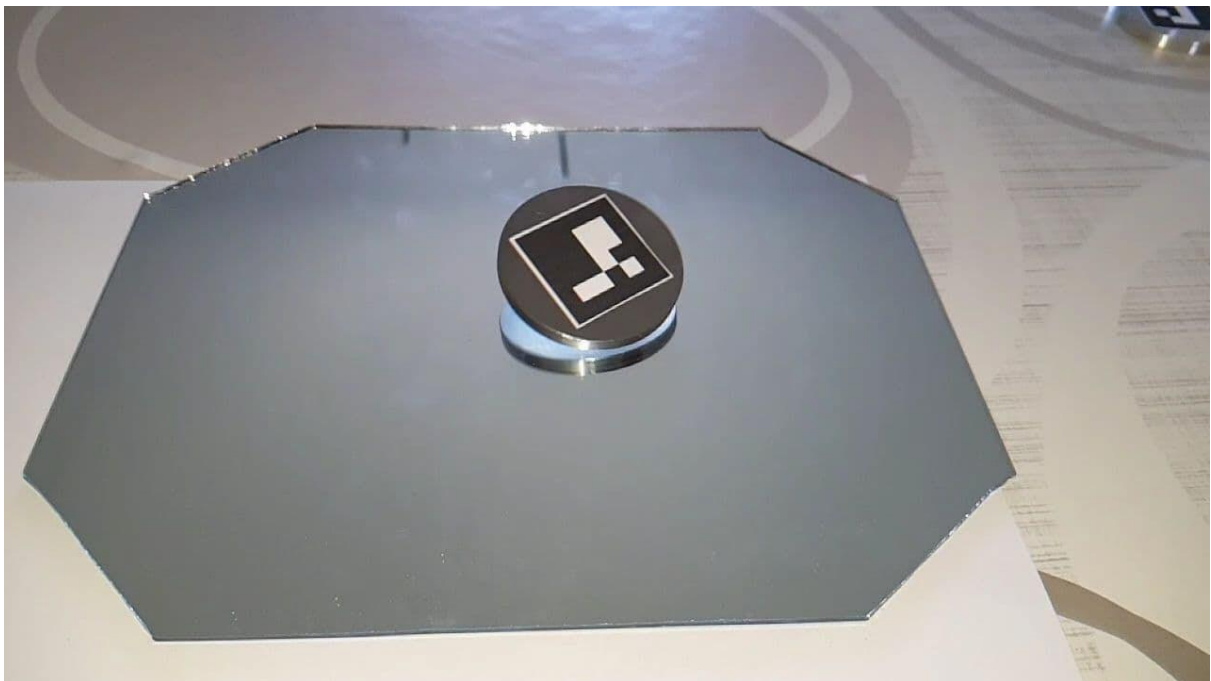


Figure 23 : Photo de la réalisation de l'expérience



Figure 24 : Photos des disques, à gauche celui en aluminium et à droite celui en acier



Figure 25 : Photos de la fabrication des disques

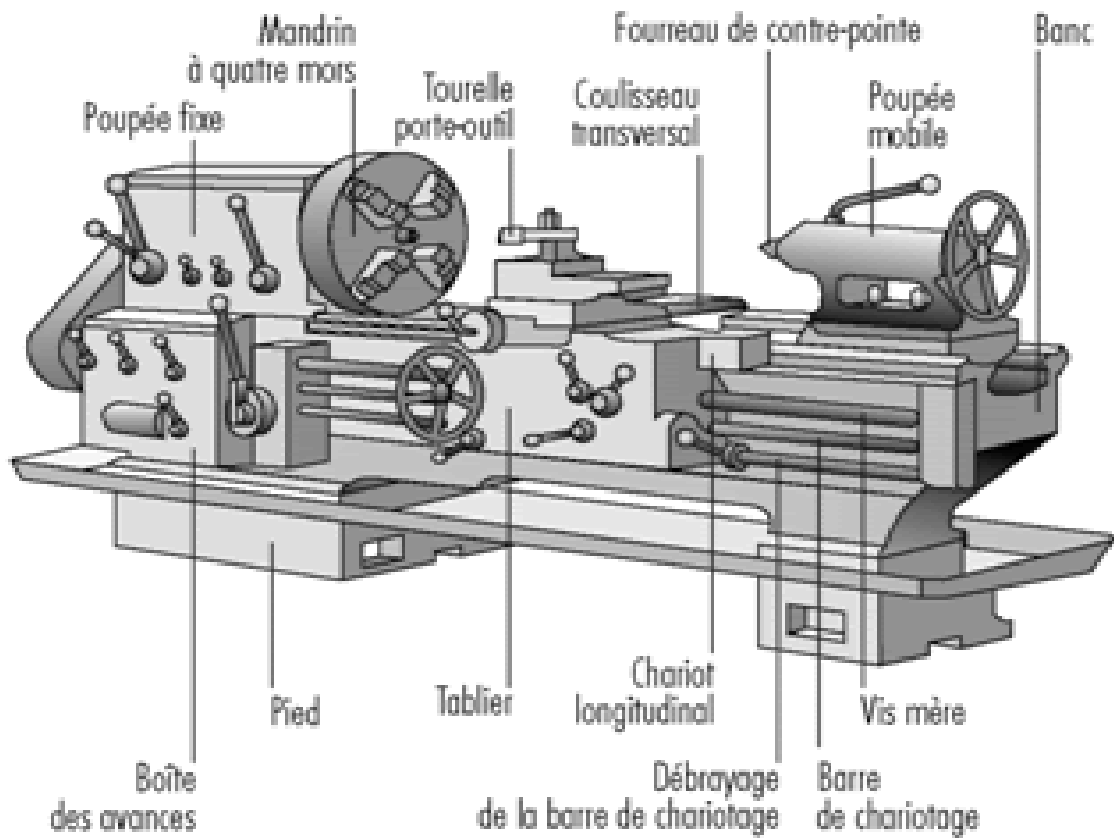


Figure 26 : Schéma définissant un tour d'usinage

Sources :

Disque d'Euler :

https://fr.wikipedia.org/wiki/Disque_d%27Euler

<http://www.eulersdisk.com/index.html>

Les Vitesses :

http://doc.rero.ch/record/321780/files/419_2008_Article_278.pdf

http://www.fast.u-psud.fr/~moisy/teaching/meca_exam04.pdf

<https://blog.espci.fr/pse1/files/2018/03/moffatt2000.pdf>

http://ruina.tam.cornell.edu/research/topics/miscellaneous/rolling_and_sliding.html

<https://digitalcommons.unl.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1146&context=physicskatz>

http://eulersdisk.com/JNLS2005_new.pdf

<https://pdfs.semanticscholar.org/ad8a/04359fd1ef67f4169b65cc76948a49926d60.pdf>

<http://www.hep.princeton.edu/~mcdonald/examples/rollingdisk.pdf>

http://doc.rero.ch/record/321780/files/419_2008_Article_278.pdf

- Précession :

<https://www.techno-science.net/definition/1837.html>

<https://www.youtube.com/watch?v=gLUYW199AsU>

Frottements :

<https://sciences-indus-cpge.papanicola.info/Frottement-Lois-de-Coulomb>

Caractéristiques disque :

<https://sites.google.com/site/lqmtsti2d/resistance-des-materiaux>

<https://fr.scribd.com/document/340931092/masse-volumique-densite-materiaux-pdf>

https://fr.wikipedia.org/wiki/Résistance_des_matériaux

https://fr.wikipedia.org/wiki/Déformation_d%27un_matériau

Angles D'Euler :

<http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/angleeuler.html>

<https://www.bing.com/videos/search?q=angles+d%27Euler&docid=607998847177982508&mid=5C9283D0DEE61FBAB0275C9283D0DEE61FBAB027&view=detail&FORM=VIRE>