Projet GMM 4A
Encadrant: François Bouchon Sébastien Lengagne

Thomas Perrin David Boucah

4 mai 2019

Résumé

Dans le domaine de la robotique, le repérage dans l'espace amène des problèmes de recherche d'intervalle sous contrainte. Afin de résoudre ces problèmes, on effectue une recherche exhaustive via des algorithmes. Afin d'optimiser cette recherche, la théorie portant sur une méthode d'analyse par intervalle et une méthode de B-spline a été développé.

Sommaire

I- Introduction

Ce projet 4A concerne le domaine de la robotique, en particulier le repérage dans l'espace d'un bras robotique. Le but de ce projet est d'optimiser un algorithme donnant une évaluation de l'endroit où se trouve le bras. Cette position dépend de paramètres initiaux tels la vitesse ou la position initiale.
La modélisation mathématique du bras robotique mène à un problème de recherche d'intervalle sous contraintes. Le but est ici de trouver un ensemble d'intervalle tel que tout les points de ces intervalles satisfasse un ensemble de conditions. Il n'existe pas de méthode théorique permettant d'obtenir directement une solution à ce problème. Il faut donc passer par des algorithmes basé sur le principe de recherche exhaustive de solutions.
La première partie de ce projet porte sur la recherche par intervalle. Il s'agit d'une algèbre entre intervalles permettant d'obtenir une estimation de l'image d'une fonction. L'enjeu de cette recherche est de pour une fonction donnée réduire au maximum l'écart entre l'estimation obtenue et l'image réelle. On appelle cet écart le pessimisme.
La deuxième partie concerne les matrices B-splines. Cette méthode se base sur les points de contrôle, autrement le nombre de points nécessaire pour estimer un encadrement d'une fonction.
Dans le cadre de ce projet deux algorithmes ont été utilisé, la bissection et les B-splines. Ces deux méthodes se basent sur le principe de l'algorithme du labyrinthe, c'est-à-dire le principe de parcours de toutes les possibilités tant que la solution n'a pas été trouvé. Ces deux méthodes ont été implémenté, tester et comparer.
Dans un souci de temps de calcul, la méthode des B-splines a été optimisé. Plus précisément l'étape du choix d'une possibilité plutôt qu'une autre, en analogie avec l'algorithme du labyrinthe, a été améliorer. Cette optimisation a été implémenté, testé et comparé avec la méthode B-spline usuelle.

II- Analyse par intervalle

II-.1 Définition

Soit $P(\mathbb{R})$ l'ensemble des sous ensemble de $\mathbb{R}$.

On définit I étant l'ensemble des éléments convexes de $P(\mathbb{R})$

On a donc $\forall a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$
$\{x \in \mathbb{R} | a < x < b\} \in I$
$\{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x < b\} \in I$
$\{x \in \mathbb{R} | a < x \leqslant b\} \in I$
$\{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x \leqslant b\} \in I$
De même $\forall a \in \mathbb{R}$
$\{x \in \mathbb{R} | a < x < \infty\} \in I$
$\{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x < \infty\} \in I$
$\{x \in \mathbb{R} | -\infty < x < a\} \in I$
$\{x \in \mathbb{R} | -\infty < x \leqslant a\} \in I$

Théorème(admis) : L'intégralité des éléments de I sont de cette forme.

On a $]-3,7]$, $]1,\infty[$, et $]-\infty,5] \in I$

Borne
Soit $[x] \in I$
On définit la borne inférieure de $[x]$ par :

$$\underline{x} = lb([x]) := \sup\{a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} | \forall x \in [x], a \leq x\}$$

On définit la borne supérieure de $[x]$ par :

$$\bar{x} = ub([x]) := \inf\{b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} | \forall x \in [x], x \leq b\}$$

En reprenant les exemples précédents :

$\underline{]-3,7]} = -3$

$\overline{]-3,7]} = 7$

$\underline{]1,\infty]} = 1$

$\overline{]1,\infty]} = \infty$

$\underline{]-\infty,5]} = -\infty$

$\overline{]-\infty,5]} = 5$

Opérations sur les intervalles
Soit $*$ une opération élémentaire, soient $[x]$,$[y] \in I$

On définit $[x] * [y]$ par :
$[x] * [y] = [\{x * y \in \mathbb{R} | x \in [x], y \in [y]\}]$

Pour $[a,b],[c,d] \in I$
$[a,b] + [c,d] = [a+c, b+d]$
$[a,b] - [c,d] = [a-d, b-c]$
$[a,b] \times [c,d] = [\min(ac,ad,bc,bd), \max(ac,ad,bc,bd)]$

Estimation
Soit $I_1 \in I, f : I_1 \to \mathbb{R}$
On a $Img(f) = \{y \in \mathbb{R} | \exists x \in I_1, y = f(x)\}$
On définit $F : I \to I$ effectuant les mêmes opérations que f mais sur des intervalles.

Pour $f : [-10,10] \to \mathbb{R}$ définit par $f(x) = x^2 - 2x + 4$
On définit $F : I \to I$ par $F(Q) = Q^2 - 2Q + 4$

On a $F([-10,10])$
$= [-10,10][-10,10] - 2[-10,10] + 4$
$= [-100,100] - [-20,20] + 4$
$= [-120,120] + 4$
$= [-116,124]$

II-.2 Propriétés

Théorème 2.1(admis) : Soit $I_1 \in I, f : I_1 \to \mathbb{R}$
On définit $F : I \to I$ effectuant les mêmes opérations que f mais sur des intervalles.
On a alors $Img(f) \subset F(I_1)$

D'après l'exemple précédent, $F([-10,10]) = [-116,124]$
On a $Img(f) = [3.24, 110.58]$

On trouve donc bien $Img(f) \subset F([-10, 10])$

Dimension n

On peut étendre le théorème 2.1 au fonction de plusieurs variables

Théorème 2.2 (admis) : Soit $I_1, ..., I_n \in I$, $f : I_1 \times ... \times I_n \to \mathbb{R}$
On définit $F : I^n \to I$ effectuant les mêmes opérations que f mais sur des intervalles
On a alors $Img(f) \subset F(I_1, ..., I_n)$

Pour $f(x_1, x_2) = 1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2$ définie sur $I_1 = I_2 = [-10, 10]$
On a $F(I_1, I_2) = 1 + I_1 + I_2 + I_1 I_2$
On a $F([-10, 10] = 1 + [-10, 10] + [-10, 10] + [-10, 10][-10, 10]$
$= [-19, 21] + [-100, 100]$
$= [-119, 121]$
On a $Img(f) = [-101.24, 117.56]$
On trouve donc bien $Img(f) \subset F([-10, 10])$

Théorème 2.3 (admis) : Soit $I_1, ..., I_n \in I, f : I_1 \times ... \times I_n \to \mathbb{R}$
Soit $F : I^n \to I$ définie comme précédemment
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

$(\alpha < \underline{F(I_1, ..., I_n)}) \Longrightarrow (\forall X \in I_1 \times ... \times I_n,\ \alpha < f(X))$

$(\ \overline{F(I_1 \times ... \times I_n)} < \alpha) \Longrightarrow (\forall X \in I_1 \times ... \times I_n\ f(X) < \alpha)$

preuve :
On note $m = inf(Img(f))$
D'après le théorème 2.2 , $Img(f) \subset F(I_1 \times ... \times I_n)$
On a donc $\underline{F(I_1 \times ... \times I_n)} < m$
Par conséquent si $\alpha < \underline{F(I_1 \times ... \times I_n)}$ alors $\alpha < m$
En utilisant la définition de l'image, on obtient $\forall x \in [a, b]\ \alpha < f(x)$
La démonstration est la même pour le sup.

III- B-spline

III-.1 Définitions et propriétés

Notation
Pour $V, W \in \mathbb{R}^n$ on note leur produit scalaire $(V, W) \in \mathbb{R}$

On note Id_n le vecteur identité de taille n

On note $P(n)$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Pour $V \in \mathbb{R}^n$ on note la $i$ème coordonnée de V, $V(i) \in \mathbb{R}$

Pour $V \in \mathbb{R}^n$ on a $(V > 0) \iff (\forall i \in [\![1, n]\!], V(i) > 0)$

Définition
Soit $E = (\vec{e1}, ..., \vec{e_n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$

On définit $C(n)$ par $C(n) = \{V \in \mathbb{R}^n | \exists b_1 \in \{0,1\}, ..., \exists b_n \in \{0,1\}, V = b_1\vec{e_1} + ...b_n\vec{e_n}\}$
Pour n=2, on a $C = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$

On définit $D(n,k)$ par $D(n,k) = \{c \in C(n) | (C, Id_n) = k\}$
Pour $n = 2, k = 1$ $D(n,k) = \{(1,0), (0,1)\}$

On définit $F(n,k)$ par
$F(n,k) = \big\{p \in P(n) | \exists d \in D(n,k) \exists \alpha \in \mathbb{R} \forall x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}, p(x_1, ..., x_n) = (d, (x_1, ..., x_n)^t) + \alpha\big\}$

Pour $P_1 \in P(2)$ définie par $P(x_1, x_2) = 1 + x_1 = \underbrace{1}_{\alpha} + (\underbrace{(1,0)^t}_{\in D(2,1)}, (x_1, x_2)^t)$
Pour $P_2 \in P(2)$ définie par $P(x_1, x_2) = 1 + x_2 = \underbrace{1}_{\alpha} + (\underbrace{(0,1)^t}_{\in D(2,1)}, (x_1, x_2)^t)$

$P_1, P_2 \in F(2,1)$

Pour $P_3 \in P(3)$ définie par $P(x_1, x_2, x_3) = 1 + x_1x_3 = \underbrace{1}_{\alpha} + (\underbrace{(1,0,1)^t}_{\in D(3,2)}, (x_1, x_2, x_3)^t)$
Pour $P_4 \in P(3)$ définie par $P(x_1, x_2, x_3) = 1 + x_2x_3 = \underbrace{1}_{\alpha} + (\underbrace{(0,1,1)^t}_{\in D(3,2)}, (x_1, x_2, x_3)^t)$

$P_3, P_4 \in F(3,2)$

On définit $V(n)$ par $\bigcup_{i=1}^{n} F(n,i) \cup \{1\}$

On définit $U(n)$ par $Vect(V(n)$

Pour $P(x_1, x_2) = 1 + 3x_1 + 4x_2 - 5x_1x_2$
$= \underbrace{1}_{\alpha} + 3 \underbrace{x_1}_{\in F(2,1)} + 4 \underbrace{x_2}_{\in F(2,1)} - 5 \underbrace{x_1x_2}_{\in F(2,2)} \in U(2)$

Pour $P(x_1, x_2, x_3) = 1 + 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 5x_1x_2 + 6x_1x_3 + 7x_2x_3 - 8x_1x_2x_3$

$= \underbrace{1}_{\alpha} + 3 \underbrace{x_1}_{\in F(3,1)} + 4 \underbrace{x_2}_{\in F(3,1)} + 5 \underbrace{x_3}_{\in F(3,1)} - 5 \underbrace{x_1x_2}_{\in F(3,2)} + 6 \underbrace{x_1x_3}_{\in F(3,2)} + 7 \underbrace{x_2x_3}_{\in F(3,2)} - 8 \underbrace{x_1x_2x_3}_{\in F(3,3)} \in U(3)$

Théorème 3.1(admis) : Soit $f \in U(n)$, soit $x_i \in \mathbb{R}$
$\forall (x_1, ..., x_i, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,
$f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = \alpha_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ...x_n) + x_i\beta_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ...x_n)$
avec $\alpha_i, \beta_i \in U(n-1)$

Pour $P(x_1, x_2, x_3) = 1 + 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 5x_1x_2 + 6x_1x_3 + 7x_2x_3 - 8x_1x_2x_3$

Soit $x_3 \in \mathbb{R}$
$P(x_1, x_2, x_3) = 1 + 3x_1 + 4x_2 - 5x_1x_2 + x_3(5 + 6x_1 + 7x_2 - 8x_1x_2)$
$= \underbrace{1 + 3x_1 + 4x_2 - 5x_1x_2}_{\alpha(x_1,x_2)} + x_3 \underbrace{(5 + 6x_1 + 7x_2 - 8x_1x_2)}_{\beta(x_1,x_2)}$
On a bien $\alpha, \beta \in U(2)$

Vecteur associé aux coefficients de f :

Soit $f \in U(1)$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha + \beta x$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
On définit $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Soit $f \in U(n)$
D'après le théorème 3.1, $\exists \alpha, \beta \in U(n-1)$ tel que
$\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, f(x_1, ..., x_n) = \alpha(x_1, ..., x_{n-1}) + x_n\beta(x_1, ..., x_{n-1})$
on définit X par la relation de récurrence suivante :

$$X = \begin{pmatrix} X_\alpha \\ X_\beta \end{pmatrix}$$

Pour $n = 1$ on a $f(x) = a + bx$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

On a donc $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Pour $n = 2$ on a $f(x_1, x_2) = a + bx_1 + cx_2 + dx_1x_2$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) = \underbrace{a + bx_1}_{\alpha \in U(1)} + x_2 \underbrace{(c + dx_1)}_{\beta \in U(1)}$$

On a donc $X = \begin{pmatrix} X_\alpha \\ X_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

Pour $n = 3$ on a

$f(x_1, x_2, x_3) = a + bx_1 + cx_2 + dx_1x_2 + ex_3 + fx_1x_3 + gx_2x_3 + hx_1x_2x_3$

avec $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{a + bx_1 + cx_2 + dx_1x_2}_{\alpha \in U(2)} + x_3 \underbrace{(e + fx_1 + gx_2 + hx_1x_2)}_{\beta \in U(2)}$$

On a donc $X = \begin{pmatrix} X_\alpha \\ X_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix}$

Remarque : On dit que X est le vecteur associé aux coefficients de f

Corolaire : $X \in \mathbb{R}^{2^n}$

preuve :

Par récurrence, on a bien $X \in \mathbb{R}^4$ pour $n = 2$

Supposons $\forall f \in U(n), X \in \mathbb{R}^{2^n}$

Soit $f \in U(n+1)$

$\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, f(x_1, ..., x_n) = \alpha(x_1, ..., x_{n-1}) + x_n\beta(x_1, ..., x_{n-1})$ d'après le théorème 3.1 avec $\alpha, \beta \in U(n)$

On applique l'hypothèse de récurrence à X_α et X_α

D'où $dim(X_\alpha) = dim(X_\beta) = 2^n$

Par définition, $X = \begin{pmatrix} X_\alpha \\ X_\beta \end{pmatrix}$
D'où $dim(X) = dim(X_\alpha) + dim(X_\beta) = 2^n + 2^n = 2^n(1+1) = 2^{n+1}$

Théorème 3.2(admis) : Soit f_1,$f_2 \in U(n), \alpha \in \mathbb{R}$
On a $f_1 + \alpha f_2 \in U(n)$
De plus pour $X_{f_1}, X_{f_2} \in \mathbb{R}^{2^n}$ les vecteurs associés aux coefficients de f_1 et f_2,
$X_{f_1+\alpha f_2} = X_{f_1} + \alpha X_{f_2}$

Pour $f_1 \in P(2)$ définie par $f_1(x_1, x_2) = a_1 + b_1x_1 + c_1x_2 + d_1x_1x_2$
On a $X_{f_1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}$
Pour $f_2 \in P(2)$ définie par $f_2(x_1, x_2) = a_2 + b_2x_1 + c_2x_2 + d_2x_1x_2$
On a $X_{f_2} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}$
On a $(f_1 + \alpha f_2)(x_1, x_2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x_1 + (c_1 + c_2)x_2 + (d_1 + d_2)x_1x_2 \in U(2)$
On a bien $X = \begin{pmatrix} a_1 + \alpha a_2 \\ b_1 + \alpha b_2 \\ c_1 + \alpha c_2 \\ d_1 + \alpha d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = X_{f_1} + \alpha X_{f_2}$

B-spline

Soit $I_1 \in I$, on définit $B_{I_1} \in M_2(\mathbb{R})$ par $B_{I_1} = \begin{pmatrix} \frac{-\overline{I_1}}{\underline{I_1}-\overline{I_1}} & \frac{\underline{I_1}}{\underline{I_1}-\overline{I_1}} \\ \frac{1}{\underline{I_1}-\overline{I_1}} & \frac{-1}{\underline{I_1}-\overline{I_1}} \end{pmatrix}$
On a donc $B_{I_1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{I_1} \\ 1 & \overline{I_1} \end{pmatrix}$
On appelle B_{I_1} la matrice B-spline associé à I_1

Ensemble des combinaisons A

Pour $I_1, ..., I_n \in I$ on définit $A_{I_1,...,I_n}$ par
$A_{I_1,...,I_n} = \left\{V \in \mathbb{R}^n | \exists b_1 \in \{0,1\}, ..., \exists b_n \in \{0,1\} | V = (b_1\underline{I_1} + (1-b_1)\overline{I_1}, ..., b_n\underline{I_n} + (1-b_n)\overline{I_n})\right\}$

Pour $n = 2$
$A(I_1, I_2) = \left\{(\underline{I_1}, \underline{I_2}), (\overline{I_1}, \underline{I_2}), (\underline{I_1}, \overline{I_2}), (\overline{I_1}, \overline{I_2})\right\}$

Produit de Kroeneker
Soit $E \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ $F \in M_{p,q}(\mathbb{R})$

On définit le produit de Kroeneker $\otimes$ par

$$E \otimes F = \begin{pmatrix} e_{1,1}F & \cdots & e_{1,m}F \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n,1}F & \cdots & e_{n,m}F \end{pmatrix} \in M_{np,mq}(\mathbb{R})$$

Pour $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$$E \otimes F = \begin{pmatrix} 1\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} & 2\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ 3\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} & 4\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 10 & 12 \\ 7 & 8 & 14 & 16 \\ 15 & 18 & 20 & 24 \\ 21 & 24 & 28 & 32 \end{pmatrix}$$

III-.2 Dimension 1

Théorème 3.3 :
Soit $f \in U(1)$, $I_1 \in I$

$(\forall c \in A(I_1), f(c)$ est positif$) \iff (P = B^{-1}X > 0)$
avec $B^{-1} = B_{I_1}^{-1}$ et X vecteur associé aux coefficients de f

preuve :
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in I_1, f(x) = \alpha + x\beta$
On a $A(I_1) = \{\underline{I_1}, \overline{I_1}\}$
Par conséquent $(\forall c \in A(I_1) f(c)$ est positif $)$
$\iff f(\underline{I_1}) > 0$ et $f(\overline{I_1}) > 0)$
$\iff (\alpha\underline{I_1} + \beta > 0$ et $\alpha\underline{I_1} + \beta > 0)$

$$\iff \begin{pmatrix} \alpha\underline{I_1} + \beta \\ \\ \alpha\overline{I_1} + \beta \end{pmatrix} > 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & \underline{I_1} \\ \\ 1 & \overline{I_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \\ \beta \end{pmatrix} > 0$$

$\iff B_{I_1}^{-1}X > 0$
On a bien le résultat attendu

NB : On appelle B la matrice B-spline associé à f et P le vecteur des points de contrôle.

Théorème 3.4 :(P est positif) $\iff$ (f est positif sur I_1)

preuve :
Montrons (P est positif) $\Longrightarrow$ (f est positif sur I_1)

D'après le théorème 3.3, (P est positif) $\Longrightarrow$ ($f(\underline{I_1})$, $f(\overline{I_1})$ sont positifs)
Par l'absurde supposons qu'il existe $c \in I_1$ tel que $f(c) < 0$ et $f(\underline{I_1})$, $f(\overline{I_1})$ sont positifs
Si α est positif alors f est croissant
On a donc $f(\underline{I_1}) < f(c)$
D'où $0 < f(c)$ impossible
De même Si α est négatif alors f est décroissant
On a donc $f(\overline{I_1}) < f(c)$
Soit $0 < f(c)$ impossible

Montrons (f est positif sur I_1)$\Longrightarrow$(P est positif)

D'après le théorème 3.3, $\forall i \in [\![1, 2]\!]$, $P(i) \in Img(f)$
D'où (f est positif sur I_1)$\Longrightarrow$(P est positif)

Théorème 3.4(bis) :(P est négatif) $\iff$ (f est négatif sur I_1)

La preuve est similaire.

III-.3 Dimension 2

Théorème 3.5 : Soit $f \in U(2)$

On a ($\forall c \in A(I_1, I_2), f(c)$ est positif) $\iff$ ($P = B^{-1}X > 0$)
avec $B^{-1} = B_{I_2}^{-1} \otimes B_{I_1}^{-1}$ et X vecteur associé aux coefficients de f

preuve :
On a $f(x_1, x_2) = a + bx_1 + cx_2 + dx_1x_2$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

On a $A(I_1, I_2) = \{(\underline{I_1}, \underline{I_2}), (\overline{I_1}, \underline{I_2}), (\underline{I_1}, \overline{I_2}, (\overline{I_1}, \overline{I_2})\}$

On a donc($\forall c \in A(2), f(c)$ est positif) $\iff$ ($f(\underline{I_1}, \underline{I_2}), f(\overline{I_1}, \underline{I_2}), f(\underline{I_1}, \overline{I_2})$ et $f(\overline{I_1}, \overline{I_2})$ sont positifs)
On a $P = B_{I_2}^{-1} \otimes B_{I_1}^{-1} X$

$$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{I_1} \\ & \\ 1 & \overline{I_1} \end{pmatrix} B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{I_2} \\ & \\ 1 & \overline{I_2} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

D'où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \underline{I_1} & \underline{I_2} & \underline{I_1}\,\underline{I_2} \\ 1 & \overline{I_1} & \underline{I_2} & \overline{I_1}\,\underline{I_2} \\ 1 & \underline{I_1} & \overline{I_2} & \underline{I_1}\,\overline{I_2} \\ 1 & \overline{I_1} & \overline{I_2} & \overline{I_1}\,\overline{I_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a + b\underline{I_1} + c\underline{I_2} + d\underline{I_1}\,\underline{I_2} \\ a + b\overline{I_1} + c\underline{I_2} + d\overline{I_1}\,\underline{I_2} \\ a + b\underline{I_1} + c\overline{I_2} + d\underline{I_1}\,\overline{I_2} \\ a + b\overline{I_1} + c\overline{I_2} + d\overline{I_1}\,\overline{I_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f(\underline{I_1}, \underline{I_2}) \\ f(\overline{I_1}, \underline{I_2}) \\ f(\underline{I_1}, \overline{I_2}) \\ f(\overline{I_1}, \overline{I_2}) \end{pmatrix}$$

On a donc (P est positif) $\iff$ ($f(\underline{I_1}, \underline{I_2})$, $f(\overline{I_1}, \underline{I_2})$, $f(\underline{I_1}, \overline{I_2})$ et $f(\overline{I_1}, \overline{I_2})$ sont positifs)
D'où le résultat

Remarque : On peut associer à chaque colonne à un membre de f

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{I_1} & \underline{I_2} & \underline{I_1}\,\underline{I_2} \\ & & & \\ 1 & \overline{I_1} & \underline{I_2} & \overline{I_1}\,\underline{I_2} \\ & & & \\ 1 & \underline{I_1} & \overline{I_2} & \overline{I_2}\,\underline{I_1} \\ & & & \\ \underbrace{1}_{1} & \underbrace{\overline{I_1}}_{x_1} & \underbrace{\overline{I_2}}_{x_2} & \underbrace{\overline{I_1 I_2}}_{x_1 x_2} \end{pmatrix}$$

Théorème 3.6 : (P est positif) $\iff$ (f est positif sur $I_1 \times I_2$)

preuve :

Montrons (P est positif) $\Longrightarrow$ (f est positif sur $I_1 \times I_2$)

On a $B^{-1} = B_{I_2}^{-1} \otimes B_{I_1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{I_2} \\ \\ 1 & \overline{I_2} \end{pmatrix} \otimes B_{I_1}^{-1} = \begin{pmatrix} B_{I_1}^{-1} & \underline{I_2} B_{I_1}^{-1} \\ \\ B_{I_1}^{-1} & \overline{I_2} B_{I_1}^{-1} \end{pmatrix}$

D'où $P = B^{-1} X$

$$= \begin{pmatrix} B_{I_1}^{-1} & \underline{I_2} B_{I_1}^{-1} \\ \\ B_{I_1}^{-1} & \overline{I_2} B_{I_1}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B_{I_1}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \underline{I_2} B_{I_1}^{-1} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\ \\ B_{I_1}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \overline{I_2} B_{I_1}^{-1} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B_{I_1}^{-1} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \underline{I_2} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) \\ \\ B_{I_1}^{-1} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \overline{I_2} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B_{I_1}^{-1} \begin{pmatrix} a + \underline{I_2} c \\ b + \underline{I_2} d \end{pmatrix} \\ \\ B_{I_1}^{-1} \begin{pmatrix} a + \overline{I_2} c \\ b + \overline{I_2} d \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

On définit $f_1, f_2 \in U(1)$ par $\forall x_1 \in I_1 \begin{cases} f_1(x_1) = (a + c\underline{I_2}) + (b + d\underline{I_2}) x_1 \\ f_2(x_1) = (a + c\underline{I_2}) + (b + d\underline{I_2}) x_1 \end{cases}$

On a $P_1 = B_{I_1}^{-1} \begin{pmatrix} a + \underline{I_2} c \\ b + \underline{I_2} d \end{pmatrix} P_2 = B_{I_1}^{-1} \begin{pmatrix} a + \overline{I_2} c \\ b + \overline{I_2} d \end{pmatrix}$

On a donc $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$

Par conséquent, $(P > 0) \Longrightarrow (P_1 > 0$ et $P_2 > 0)$
On applique le théorème 3.4 à P_1 et P_2
On a donc f_1 et f_2 positif sur I_1

D'où $\forall x_1 \in I_1$, $\begin{pmatrix} f_1(x_1) \\ f_2(x_1) \end{pmatrix} > 0$

$\iff \begin{pmatrix} (a + c\underline{I_2}c) + (b + \underline{I_2}d)x_1 \\ (a + \overline{I_2}c) + (b + \overline{I_2}d)x_1 \end{pmatrix} > 0$

$\iff \begin{pmatrix} (a + bx_1) + \underline{I_2}(c + dx_1) \\ (a + bx_1) + \overline{I_2}(c + dx_1) \end{pmatrix} > 0$

$\iff \begin{pmatrix} 1 & \underline{I_2} \\ & \\ 1 & \overline{I_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + bx_1 \\ \\ c + dx_1 \end{pmatrix} > 0$

Soit f_{x_1} définit par :
$\forall x_2 \in I_2, f_{x_1}(x_2) = (a + bx_1) + (c + dx_1)x_2$

On a $P_{f_{x_1}} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{I_2} \\ 1 & \overline{I_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + bx_1 \\ c + dx_1 \end{pmatrix} > 0$
On applique le théorème 3.4 à f_{x_1}
On a donc f_{x_1} positif sur I_2

D'où $\forall x_1 \in I_1, f_{x_1}$ positif sur I_2
$\iff \forall x_1 \in I_1 \forall x_2 \in I_2, f_{x_1}(x_2) > 0$
$\iff (\forall x_1 \in I_1 \forall x_2 \in I_2, (a + bx_1) + (c + dx_1)x_2 > 0)$
$\iff (\forall x_1 \in I_1 \forall x_2 \in I_2, a + bx_1 + cx_1 + dx_1x_2 > 0)$
$\iff (\forall x_1 \in I_1 \forall x_2 \in I_2, f(x_1, x_2) > 0)$

On a donc (P est positif)$\Longrightarrow$(f est positif sur $I_1 \times I_2$)

Montrons (f est positif sur $I_1 \times I_2$)$\Longrightarrow$(P est positif)

D'après le théorème 3.3, $\forall i \in [\![1, 4]\!]$, $P(i) \in Img(f)$
D'où (f est positif sur $I_1 \times I_2$)$\Longrightarrow$(P est positif)

Théorème 3.6(bis) : (P est négatif) $\iff$ (f est négatif sur $I_1 \times I_2$)

La preuve est similaire

III-.4 Dimension n

Théorème 3.7 : Soit $f \in U(n)$, $I_1, ..., I_n \in I$
$(\forall c \in A(I_1, ..., I_n), f(c)$ est positif$) \iff (P = B^{-1}X > 0)$
avec $B^{-1} = B_{I_n}^{-1} \otimes ... \otimes B_{I_1}^{-1}$, X vecteur associé aux coefficients de f

preuve :

Montrons $(P = B^{-1}X > 0) \Longrightarrow (\forall c \in A(I_1, ..., I_n), f(c)$ est positif)

Par récurrence, on a prouvé le théorème pour $f \in U(1)$ et $f \in U(2)$

Supposons que $\forall f \in U(n)$
$(\forall c \in A(I_1, ..., I_n), f(c)$ est positif$) \iff (P = B^{-1}X > 0)$

Soit $f \in U(n+1)$
$P = B^{-1}X$ avec $B^{-1} = B_{I_{n+1}}^{-1} \otimes ... \otimes B_{I_1}^{-1}$ et X vecteur associé aux coefficients de f

On a $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{I_{n+1}} \\ & \\ 1 & \overline{I_{n+1}} \end{pmatrix} \otimes \underbrace{B_{I_n}^{-1} \otimes ... \otimes B_{I_1}^{-1}}_{B_n^{-1}}$
$= \begin{pmatrix} B_n^{-1} & \underline{I_{n+1}}B_n^{-1} \\ & \\ B_n^{-1} & \overline{I_{n+1}}B_n^{-1} \end{pmatrix}$
On utilise le théorème 3.1 pour avoir $\alpha, \beta \in U(n)$ tel que
$\forall (x_1, ..., x_{n+1}) \in I_1 \times ... \times I_{n+1}, f(x_1, ..., x_{n+1}) = \alpha(x_1, ..., x_n) + x_{n+1}\beta(x_1, ...x_n)$

On a $P_\alpha = \underbrace{B_{I_n}^{-1} \otimes ... \otimes B_{I_1}^{-1}}_{B_n^{-1}} X_\alpha$ et $P_\beta = \underbrace{B_{I_n}^{-1} \otimes ... \otimes B_{I_1}^{-1}}_{B_n^{-1}} X_\beta$
Soit $\alpha + \underline{I_{n+1}}\beta$ et
$\alpha + \overline{I_{n+1}}\beta$.
D'après le théorème 3.2, $X_{\alpha+\underline{I_{n+1}}\beta} = X_\alpha + \underline{I_{n+1}}X_\beta$ et $X_{\alpha+\overline{I_{n+1}}\beta} = X_\alpha + \overline{I_{n+1}}X_\beta$

On a donc $P_{\alpha+\underline{I_{n+1}}\beta} = B_n^{-1}(X_\alpha + \underline{I_{n+1}}X_\beta)$

De même $P_{\alpha+\overline{I_{n+1}}\beta} = B_n^{-1}(X_\alpha + \overline{I_{n+1}}X_\beta)$

Par définition $X = \begin{pmatrix} X_\alpha \\ X_\beta \end{pmatrix}$

On a donc $P = B^{-1}X$

$$= \begin{pmatrix} B_n^{-1} & \underline{I_{n+1}}B_n^{-1} \\ & \\ B_n^{-1} & \overline{I_{n+1}}B_n^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_\alpha \\ \\ X_\beta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} B_n^{-1}X_\alpha + \underline{I_{n+1}}B_n^{-1}X_\beta \\ \\ B_n^{-1}X_\alpha + \overline{I_{n+1}}B_n^{-1}X_\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B_n^{-1}(X_\alpha + \underline{I_{n+1}}X_\beta) \\ \\ B_n^{-1}(X_\alpha + \overline{I_{n+1}}X_\beta) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} P_{\alpha+\underline{I_{n+1}}\beta} \\ P_{\alpha+\overline{I_{n+1}}\beta} \end{pmatrix}$$

Par conséquent si $P > 0$ alors $P_{\alpha+\underline{I_{n+1}}\beta} > 0$ et $P_{\alpha+\overline{I_{n+1}}\beta} > 0$

On applique l'hypothèse de récurrence à $P_{\alpha+\underline{I_{n+1}}\beta}$ et $P_{\alpha+\underline{I_{n+1}}\beta}$

On a donc $\forall c \in A(I_1, ..., I_n) \begin{cases} \alpha(c) + \underline{I_{n+1}}\beta(c) > 0 \\ \\ \alpha(c) + \overline{I_{n+1}}\beta(c) > 0 \end{cases}$

$\iff \forall c \in A(I_1, ..., I_n) \begin{cases} f(c, \underline{I_{n+1}}) > 0 \\ \\ f(c, \overline{I_{n+1}}) > 0 \end{cases}$

On a donc $\forall c \in A(I_1, ..., I_{n+1}), f(c) > 0$

On a donc $(P > 0) \Longrightarrow (\forall c \in A(I_1, ..., I_{n+1}), f(c) > 0)$

Montrons $(\forall c \in A(I_1, ..., I_{n+1}), f(c) > 0) \Longrightarrow (P > 0)$

On a $P = \begin{pmatrix} P_{\alpha+\underline{I_{n+1}}\beta} \\ P_{\alpha+\overline{I_{n+1}}\beta} \end{pmatrix}$

On a $(\forall c \in A(I_1, ..., I_{n+1}), f(c) > 0)$

$\iff \begin{cases} \forall c \in A(I_1, ..., I_n), f(c, \underline{I_{n+1}}) > 0 \\ (\forall c \in A(I_1, ..., I_n), f(c, \overline{I_{n+1}}) > 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \forall c \in A(I_1, ..., I_n), \alpha(c) + \underline{I_{n+1}}\beta(c) > 0 \\ (\forall c \in A(I_1, ..., I_n), \alpha(c) + \overline{I_{n+1}}\beta(c) > 0 \end{cases}$

On applique l'hypothèse de récurrence à $\alpha + \underline{I_{n+1}}\beta$ et $\alpha + \overline{I_{n+1}}\beta$

D'où $P_{\alpha+\underline{I_{n+1}}\beta}$ et $P_{\alpha+\overline{I_{n+1}}\beta} > 0$

Or $P = \begin{pmatrix} P_{\alpha+\underline{I_{n+1}}\beta} > 0 \\ P_{\alpha+\overline{I_{n+1}}\beta} > 0 \end{pmatrix} > 0$

On a donc $(\forall c \in A(I_1, ..., I_{n+1}), f(c) > 0) \Longrightarrow (P > 0)$

Théorème 3.8 : (P est positif) $\Longleftrightarrow$ (f est positif sur $I_1, ...I_n$)

preuve :
Par récurrence on a prouvé les cas $f \in U(1), U(2)$

Supposons avoir $f \in U(n)$, (P positif) $\Longrightarrow$ f positif sur $I_1, ...I_n$

Soit $f \in U(n+1)$
$P = B^{-1}X$ avec $B^{-1} = B_{I_{n+1}}^{-1} \otimes ... \otimes B_{I_1}^{-1}$ et X vecteur associé aux coefficients de f

Montrons (P est positif) $\Longrightarrow$ (f est positif sur $I_1, ...I_{n+1}$)

On a $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{I_{n+1}} \\ & \\ 1 & \overline{I_{n+1}} \end{pmatrix} \otimes \underbrace{B_{I_n}^{-1} \otimes ... \otimes B_{I_1}^{-1}}_{B_n^{-1}}$

$= \begin{pmatrix} B_n^{-1} & \underline{I_{n+1}}B_n^{-1} \\ & \\ B_n^{-1} & \overline{I_{n+1}}B_n^{-1} \end{pmatrix}$

On utilise le théorème 3.1 pour avoir $\alpha, \beta \in U(n)$ tel que
$\forall (x_1, ..., x_{n+1}) \in I_1 \times ... \times I_{n+1}, f(x_1, ..., x_{n+1}) = \alpha(x_1, ..., x_n) + x_{n+1}\beta(x_1, ...x_n)$

On a $P_\alpha = \underbrace{B_{I_n}^{-1} \otimes ... \otimes B_{I_1}^{-1}}_{B_n^{-1}} X_\alpha$ et $P_\beta = \underbrace{B_{I_n}^{-1} \otimes ... \otimes B_{I_1}^{-1}}_{B_n^{-1}} X_\beta$

Soit $\alpha + \underline{I_{n+1}}\beta$ et
$\alpha + \overline{I_{n+1}}\beta$.
D'après le théorème 3.3, $X_{\alpha+\underline{I_{n+1}}\beta} = X_\alpha + \underline{I_{n+1}}X_\beta$ et $X_{\alpha+\overline{I_{n+1}}\beta} = X_\alpha + \overline{I_{n+1}}X_\beta$

On a donc $P_{\alpha+\underline{I_{n+1}}\beta} = B_n^{-1}(X_\alpha + \underline{I_{n+1}}X_\beta)$

De même $P_{\alpha+\overline{I_{n+1}}\beta} = B_n^{-1}(X_\alpha + \overline{I_{n+1}}X_\beta)$

Par définition $X = \begin{pmatrix} X_\alpha \\ X_\beta \end{pmatrix}$

On a donc $P = B^{-1}X$

$$= \begin{pmatrix} B_n^{-1} & \underline{I_{n+1}}B_n^{-1} \\ & \\ B_n^{-1} & \overline{I_{n+1}}B_n^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_\alpha \\ X_\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B_n^{-1}X_\alpha + \underline{I_{n+1}}B_n^{-1}X_\beta \\ \\ B_n^{-1}X_\alpha + \overline{I_{n+1}}B_n^{-1}X_\beta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} B_n^{-1}(X_\alpha + \underline{I_{n+1}}X_\beta) \\ \\ B_n^{-1}(X_\alpha + \overline{I_{n+1}}X_\beta) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} P_{\alpha+\underline{I_{n+1}}\beta} \\ P_{\alpha+\overline{I_{n+1}}\beta} \end{pmatrix}$$

Par conséquent si $P > 0$ alors $P_{\alpha+\underline{I_{n+1}}\beta} > 0$ et $P_{\alpha+\overline{I_{n+1}}\beta} > 0$

On applique l'hypothèse de récurrence à $P_{\alpha+\underline{I_{n+1}}\beta}$ et $P_{\alpha+\underline{I_{n+1}}\beta}$

On a donc $\alpha + \underline{I_{n+1}}\beta$ et $\alpha + \overline{I_{n+1}}\beta$ positif sur $I_1, ..., I_n$

Soit $f_{x_1,...,x_n}(x_{n+1}) = \alpha(x_1, ..., x_n) + x_{n+1}\beta(x_1, ..., x_n)$
$f_{x_1,...,x_n}$ est un polynôme de degré 1.

Comme $\alpha + \underline{I_{n+1}}\beta$ et $\alpha + \overline{I_{n+1}}\beta$ sont positifs alors $f_{x_1,...,x_n}(\underline{I_{n+1}})$ et $f_{x_1,...,x_n}(\overline{I_{n+1}})$ sont positifs.

On a $P_{f_{x_1,...,x_n}} = B_{I_{n+1}}^{-1}X_{f_{x_1,...,x_n}} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{I_{n+1}} \\ \\ 1 & \overline{I_{n+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(x_1, ..., x_n) \\ \\ \beta(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix}$

D'après le théorème 3.3,
$(f_{x_1,...,x_n}(\underline{I_{n+1}})$ et $f_{x_1,...,x_n}(\overline{I_{n+1}})) \iff (P_{f_{x_1,...,x_n}}$ est positif)
On a donc $P_{f_{x_1,...,x_n}}$ positif

On applique le théorème 3.4 à $P_{f_{x_1,...,x_n}}$
On a donc $f_{x_1,...,x_n}$ positif sur I_{n+1}

Par conséquent
$\forall (x_1, ..., x_n) \in I_1 \times ... \times I_n, \forall x_{n+1} \in I_{n+1} f_{x_1,...,x_n}(x_{n+1}) > 0$
$\iff \forall x_1, ..., x_{n+1} \in I_1 \times ... \times I_{n+1} f(x_1, ..., x_{n+1}) > 0$
D'où la preuve pour $n + 1$

On a donc bien (P est positif)$\Longrightarrow$(f est positif sur $I_1, ...I_n$))

Montrons que (f est positif sur $I_1, ...I_n$)) $\Longrightarrow$ (P est positif)

D'après le théorème 3.7, $\forall i \in [\![1, 2^n]\!]$, $P(i) \in Img(f)$
D'où (f est positif sur $I_1, ...I_n$)) $\Longrightarrow$(P est positif)

IV- Problème général

Le but du projet est d'estimer une zone dans laquelle on peut déplacer le bras robotique. Cependant le bras ne doit par exemple pas percuter d'autre élément, on impose donc des contraintes sur cette zone.
Si le bras n'était fait que d'un composant il n'y aurait que trois intervalles, respectivement associés aux axes x, y, z, à déterminer. Les contraintes pourraient porter sur ces trois intervalles.
Si les contraintes se limitent à ce que le bras ne doivent pas quitter une pièce de dimensionx_p, y_p, z_p alors on cherche des intervalles I_x, I_y, I_z tel que $\forall x \in I_x, \forall y \in I_y, \forall z \in I_z, 0 < x < x_p, 0 < y < y_p, 0 < z < z_p$.
Ici le bras est fait de plusieurs composants, chacun ayant ses propres axes X, Y, Z. Le problème devient donc une recherche de n intervalles sous contraintes. Les contraintes peuvent porter sur ces n intervalles.

Voici la forme la plus générale du problème mathématique :

Soit $n \in \mathbb{N}$
Soit $p \in \mathbb{N}$, $Q_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ l'ensemble des contraintes

On souhaite obtenir un ensemble d'intervalles I_1,...,$I_n \in I$ tel que :
$\forall (x_1, ..., x_n) \in I_1 \times ... \times I_n \; \forall j \in [1, p] \; Q_j(x_1, ..., x_n) \geq 0$

Pour résoudre ce problème, il n'existe actuellement pas de méthode permettant d'obtenir une solution exacte.
On utilise donc des algorithmes pour trouver une solution.

V- Algorithme utilisé

V-.1 Approche naïve

Soient $I_1, ..., I_n \in I$ intervalles de départ.
Une approche naïve de ce problème serait de prendre n points uniformément séparés dans $I_1, ..., I_n$ et de tester toutes les combinaisons possibles de ces points sur les contraintes.

Exemple :
$Q_1 = Q_2 = [-10, 10]$
Pour i allant de 1 à N :
    Pour j allant de 1 à N
        x_i=$\underline{Q_1}$ + (i/N)×longueur(Q_1)=-10+20(i/N)
        x_j= $\underline{Q_2}$ + (j/N)×longueur(Q_2)=-10+20(i/N)
        Si $Q(x_i, x_j) > 0$
            On valide (x_i, x_j)
        fsi
    fpour
fpour

Cette méthode présente deux inconvénients.
Premièrement elle ne fournit qu'un ensemble de points solutions et non pas deux intervalles solutions.
Deuxièmement si l'on a k intervalles en paramètre de départ cette méthode effectue k^N opérations avec N nombre de points choisis par intervalles et a donc une complexité exponentielle.

V-.2 Principe général

Les deux algorithmes que nous utiliserons se basent sur le modèle de l'algorithme du labyrinthe.
Pour rappel, voici l'algorithme du labyrinthe

```
Soit P une pile vide
On empile P avec CaseDeDépart
Tant que(P non vide)
  Soit e la case en haut de la pile P
  On dépile P
  Si(e est la sortie)
    On arrête
  Sinon
    Pour chaque case voisine v de e
      Si(v n'est pas un mur)
        On empile P avec v
      fsi
    fpour
  fsi
ftantque
```

L'adaptation de cet algorithme à notre problème sera :

```
Soit P une pile vide
On empile P avec IntervalleDeDépart
Tant que(P non vide)
  Soit i l'intervalle en haut de la pile P
  On dépile P
  Si(i valide les contraintes de départ)
    On arrête
  Sinon
    Pour chaque sous ensemble v de i
      Si(v peut valider les contraintes de départ)
        On empile P avec v
      fsi
    fpour
  fsi
ftantque
```

L'objectif est maintenant d'expliciter les étapes "i valide les contraintes", "pour chaque sous ensemble v de i" et "v peut valider les conditions".

L'étape "Pour chaque sous intervalle v de i" est commune au deux algorithmes que nous utilisons.
Comme i est un intervalle donc continue, il est impossible de tester tout les sous intervalles de v.
Par conséquent on considère la première moitié de l'intervalle et la seconde moitié comme étant les seules sous intervalles de V.

Exemple
Soit i=$[0,6] \times [-10,10] \in I^2$ intervalles de départ
L'étape "Pour chaque sous intervalle v de i" revient ici à
"Pour $\{[0,3] \times [-10,10], [3,6] \times [-10,10], [0,6] \times [-10,0][0,6] \times [0,10]\}$"

Les étapes "i valide les contraintes et "v peut valider les conditions" sont propres à chaque algorithme.

V-.3 Analyse d'intervalle

Nous allons premièrement reformuler les hypothèses du problème de départ.

Soit $n \in \mathbb{N}$,$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
Soit $a < b \in \mathbb{R}$
On souhaite trouver un ensemble d'intervalles $(I_1,...,I_n) \in I^n$ tel que $\forall (x_1, ..., x_n) \in I_1 \times ... \times I_n$, $a < f(x_1, ..., x_n) < b$

Soit $i = (I_1,...,I_n) \in I^n$
Soit F la fonction effectuant les mêmes opérations que f mais sur des intervalles définie dans la partie "Analyse par intervalles".

On a $\underline{F(I_1, ..., I_n)} > a \Longrightarrow f$ est supérieur à a sur $I_1, ..., I_n$

De même $\overline{F(I_1, ..., I_n)} < b \Longrightarrow f$ est inférieur à b sur $I_1, ..., I_n$

Par conséquent,$(a < \underline{F(I_1, ..., I_n)} \wedge \overline{F(I_1, ..., I_n)} < b)$
$\Longleftrightarrow$ $(a < f < b$ sur $I_1, ..., I_n)$
iff $(i = (I_1,...,I_n)$ valide les contraintes)

On utilise le même raisonnement pour "Si v ne peut pas respecter les contraintes"
On a $\overline{F(I_1, ..., I_n)} < a \Longrightarrow f$ est inférieur à a sur $I_1, ..., I_n$

De même $\underline{F(I_1, ..., I_n)} > b \Longrightarrow f$ est supérieur à b sur $I_1, ..., I_n$

Par conséquent,$(\overline{F(I_1,...,I_n)} < a \vee \underline{F(I_1,...,I_n)} > b)$
$\iff$ $(f < a \vee b < f$ sur $I_1,...,I_n)$
$\iff$ $(i = (I_1$,...,$I_n)$ ne peut pas valider les contraintes)

Remarque : Non$(\overline{F(I_1,...,I_n)} < a \vee \underline{F(I_1,...,I_n)} > b)$
$\iff$ $(i = (I_1$,...,$I_n)$ peut valider les contraintes)

Afin de s'assurer que l'algorithme ne perde pas trop de temps sur des cas alambiqués, on ajoute la contrainte "$I_1,...,I_n$ doivent être suffisamment long" dans l'étape : $I_1,...I_n$ peuvent satisfaire les conditions. On a la forme générale de l'algorithme :

Soit P une pile vide
empiler(P,IntervalleDeDepart)
Tant que(P non vide)
  Soit i l'intervalle en haut de la pile P
  On dépile P
  Si$(a < \underline{F(I_1,...,I_n)} \wedge \overline{F(I_1,...,I_n)} < b)$
    On arrête l'algorithme
  Sinon
    Pour sous intervalle de $I_1,...,I_n$
      Si Non$\left(\overline{F(I_1,...,I_n)} < a \vee \underline{F(I_1,...,I_n)} > b\right)$ et $I_1,...,I_n$ sont suffisamment long
        On empile P avec v
      fsi
    fpour
  fsi
ftantque

V-.4 B-spline

Nous allons premièrement reformuler les hypothèses du problème de départ.

Soit $n \in \mathbb{N}$,$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
On souhaite trouver un ensemble d'intervalles $(I_1,...,I_n) \in I^n$ tel que
$\forall (x_1, ..., x_n) \in I_1 \times ... \times I_n,\ f(x_1, ..., x_n) > 0$

D'après le théorème 3.5, $(P_{controle} > 0)$
$\Longleftrightarrow$ $(f > 0$ sur $I_1, ..., I_n)$
$\Longleftrightarrow$ ($i = (I_1,...,I_n)$ valide les contraintes)

De même, $(P_{controle} < 0)$
$\Longleftrightarrow$ $(f < 0$ sur $I_1, ..., I_n)$
$\Longleftrightarrow$ ($i = (I_1,...,I_n)$ ne peut pas valider les contraintes)

Remarque :Non$(P_{controle} < 0)$
$\Longleftrightarrow$ ($i = (I_1,...,I_n)$ ne peut pas valider les contraintes)

Afin de s'assurer que l'algorithme ne perde pas trop de temps sur des cas alambiqués, on ajoute la condition "$I_1, ..., I_n$ doivent être suffisamment long" dans l'étape "Si v peut respecter les contraintes"
On a la forme générale de l'algorithme :

Soit P une pile vide
On empile P avec IntervalleDeDepart
Tant que(P non vide)
   Soit i l'intervalle en haut de la pile P
   On dépile P
   On calcule $P_{controle} = B^{-1}X$
   Si$(P_{controle} > 0)$
      On arrête l'algorithme
   Sinon
      Pour sous intervalle de $I_1, ..., I_n$
         Si $Non(P_{controle} < 0)$ et $I_1, ..., I_n$ sont suffisamment long
            On empile P avec v
         fsi
      fpour
   fsi
ftantque

V-.5 Test

NDI : nombre d'itération pour la méthode B-spline bête
I_1I : intervalle solution de I_1 pour la méthode analyse par intervalle
I_2I : intervalle solution de I_2 pour la méthode analyse par intervalle
NDB : nombre d'itération pour la méthode B-spline
I_1B : intervalle solution de I_1 pour la méthode B-spline
I_2B : intervalle solution de I_2 pour la méthode B-spline
Intervalle de départ : $[-10, 10], [-10, 10]$

$f(x_1, x_2)$	NDI	I_1I	I_2I	NDB	I_1B	I_2B
$1 + x_1 + x_2 + x_1x_2$	2	[0,10]	[0,10]	2	[0,10]	[0,10]
$-1 + x_1 + x_2 + x_1x_2$	3	[0,10]	[5,10]	3	[0,10]	[5,10]
$1 - x_1 + x_2 + x_1x_2$	4	[5,10]	[5,10]	4	[5,10]	[5,10]
$1 + x_1 - x_2 + x_1x_2$	4	[5,10]	[5,10]	4	[5,10]	[5,10]
$1 + x_1 + x_2 - x_1x_2$	10	[0,0.625]	[8.75,10]	10	[0,0.625]	[8.75,10]
$1 - x_1 + x_2 - x_1x_2$	9	[0,0.625]	[8.75,10]	9	[0,0.625]	[8.75,10]
$1 + x_1 - x_2 - x_1x_2$	22	[8.75,10]	[0,0.625]	9	[8.75,10]	[0,0.625]
$1 - x_1 - x_2 - x_1x_2$	78	[-2.5,-1.25]	[8.75,10]	9	[-2.5,-1.25]	[8.75,10]

Remarque : Le nombre d'itérations de la méthode B-spline étant au pire équivalente à celle de la méthode par intervalles, nous allons favoriser la méthode B-spline.

VI- Choix du découpage

VI-.1 Semi positivité

Théorème 6.1 : Soit $f \in U(n)$, $m \in [\![1, 2^n - 1]\!], k \in \mathbb{N}$
Si $\forall i \in [\![1, m]\!], P(i)$ est positif et $P(m+1)$ est négatif
Si $2^k \leq m < 2^{k+1}$

Alors
$\forall (x_1, ..., x_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}, f(x_1, ..., x_{k-1}, \underline{I_k}, ..., \underline{I_n}) > 0$

$\exists x_1, ..., x_{k-1} \in \mathbb{R}^{k-1}, f(x_1, ..., x_{k-1}, \overline{I_k}, ..., \underline{I_n}) < 0.$

preuve :
Par récurrence, pour $n = 1$, soit f $\in U(1)$
On a $\forall x \in I_1, f(x) = \alpha + \beta x$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
On a $P = \begin{pmatrix} f(\underline{I_1}) \\ \\ f(\overline{I_1}) \end{pmatrix}$ d'après le théorème 3.3

Par conséquent si $P(1) > 0$ et $P(2) < 0$ on a $k = 0(2^0 \leq 1 < 2^1)$
On a bien $f(\overline{I_1}) < 0$

Pour $n = 2$,soit f $\in U(2)$
On a $\forall(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2, f(x) = a + bx_1 + cx_2 + dx_1x_2$
$= \underbrace{a + bx_1}_{\alpha\in U(1)} + x_2 \underbrace{(c + dx_1)}_{\beta\in U(1)}$

On a $P = \begin{pmatrix} f(\underline{I_1}, \underline{I_2}) \\ \\ f(\overline{I_1}, \underline{I_2}) \\ \\ f(\underline{I_1}, \overline{I_2}) \\ \\ f(\overline{I_1}, \overline{I_2}) \end{pmatrix}$ d'après le théorème 3.5

Si $P(1) > 0$ et $P(2) < 0$ alors on a bien $f(\overline{I_1}, \underline{I_2}) < 0$

Si $P(1) > 0$, $P(2) > 0$ et $P(3) < 0$

On a $\begin{cases} P(1) > 0 \\ P(2) > 0 \end{cases}$
$\iff \begin{cases} f(\underline{I_1}, \underline{I_2}) = \alpha(\underline{I_1}) + \underline{I_2}\beta(\underline{I_1}) = (\alpha + \underline{I_2}\beta)(\underline{I_1}) > 0 \\ \\ f(\overline{I_1}, \underline{I_2}) = \alpha(\overline{I_1}) + \underline{I_2}\beta(\overline{I_1}) = (\alpha + \underline{I_2}\beta)(\overline{I_1}) > 0 \end{cases}$

On applique le théorème 3.1 et 3.2 à $\alpha + \underline{I_2}\beta$

On a donc $(\forall x_1 \in I_1, (\alpha + \underline{I_2}\beta)(x_1) = \alpha(x_1) + \underline{I_2}\beta(x_1) > 0 =$
$\iff (\forall x_1 \in I_1, f(x_1, \underline{I_2}) > 0)$
D'où la première partie du théorème.

On a $(P(3) < 0) \Longrightarrow (f(\underline{I_1}, \overline{I_2}) < 0)$
Par conséquent $\exists x_1 \in I_1$ tel que $f(x_1, \overline{I_2}) < 0$

On a donc bien $(\forall x_1 \in I_1, f(x_1, \underline{I_2}) > 0)$ et
$\exists x_1 \in I_1$ tel que $f(x_1, \overline{I_2}) < 0$

Si $P(1) > 0$, $P(2) > 0$, $P(3) > 0$ et $P(4) < 0$
Comme avant $(P(1) > 0$ et $P(2) > 0)$ nous donne $(\forall x_1 \in I_1, \alpha(x_1) + \underline{I_2}\beta(x_1) = f(x_1, \underline{I_2}))$
On a $(P(4) < 0) \Longrightarrow (f(\overline{I_1}, \overline{I_2}) < 0)$

Par conséquent $\exists x_1 \in I_1$ tel que $f(x_1, \overline{I_2}) < 0$

On a donc bien $(\forall x_1 \in I_1, f(x_1, \underline{I_2}) > 0)$ et
$\exists x_1 \in I_1$ tel que $f(x_1, \overline{I_2}) < 0$

Quel qu'en soit le cas, on a le résultat souhaité.

Supposons avoir le théorème pour n.

Soit $f \in U(n+1)$
$P = B^{-1}X$ avec $B^{-1} = B_{I_{n+1}}^{-1} \otimes ... \otimes B_{I_1}^{-1}$ et X vecteur associé aux coefficients de f

On a $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{I_{n+1}} \\ & \\ 1 & \overline{I_{n+1}} \end{pmatrix} \otimes \underbrace{B_{I_n}^{-1} \otimes ... \otimes B_{I_1}^{-1}}_{B_n^{-1}}$
$= \begin{pmatrix} B_n^{-1} & \underline{I_{n+1}} B_n^{-1} \\ & \\ B_n^{-1} & \overline{I_{n+1}} B_n^{-1} \end{pmatrix}$
On utilise le théorème 3.1 pour avoir $\alpha, \beta \in U(n)$ tel que
$\forall (x_1, ..., x_{n+1}) \in I_1 \times ... \times I_{n+1}, f(x_1, ..., x_{n+1}) = \alpha(x_1, ..., x_n) + x_{n+1}\beta(x_1, ... x_n)$

On a $P_\alpha = \underbrace{B_{I_n}^{-1} \otimes ... \otimes B_{I_1}^{-1}}_{B_n^{-1}} X_\alpha$ et $P_\beta = \underbrace{B_{I_n}^{-1} \otimes ... \otimes B_{I_1}^{-1}}_{B_n^{-1}} X_\beta$
Soit $\alpha + \underline{I_{n+1}}\beta$ et $\alpha + \overline{I_{n+1}}\beta$.
D'après le théorème 3.2, $X_{\alpha + \underline{I_{n+1}}\beta} = X_\alpha + \underline{I_{n+1}} X_\beta$ et $X_{\alpha + \overline{I_{n+1}}\beta} = X_\alpha + \overline{I_{n+1}} X_\beta$

On a donc $P_{\alpha + \underline{I_{n+1}}\beta} = B_n^{-1}(X_\alpha + \underline{I_{n+1}} X_\beta)$

De même $P_{\alpha + \overline{I_{n+1}}\beta} = B_n^{-1}(X_\alpha + \overline{I_{n+1}} X_\beta)$

Par définition $X = \begin{pmatrix} X_\alpha \\ X_\beta \end{pmatrix}$

On a donc $P = B^{-1}X$

$$= \begin{pmatrix} B_n^{-1} & \underline{I_{n+1}} B_n^{-1} \\ & \\ B_n^{-1} & \overline{I_{n+1}} B_n^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_\alpha \\ X_\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B_n^{-1}X_\alpha + \underline{I_{n+1}}B_n^{-1}X_\beta \\ \\ B_n^{-1}X_\alpha + \overline{I_{n+1}}B_n^{-1}X_\beta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} B_n^{-1}(X_\alpha + \underline{I_{n+1}}X_\beta) \\ \\ B_n^{-1}(X_\alpha + \overline{I_{n+1}}X_\beta) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} P_{\alpha+\underline{I_{n+1}}\beta} \\ \\ P_{\alpha+\overline{I_{n+1}}\beta} \end{pmatrix}$$

Soit $m \in [\![1, 2^{n+1}-1]\!]$
Séparons les cas : $m < 2^n$ et $2^n \leq m$
Schématiquement : $P = \begin{pmatrix} P_{\alpha+\underline{I_{n+1}}\beta} \\ \\ P_{\alpha+\overline{I_{n+1}}\beta} \end{pmatrix} \begin{matrix} \} \, p < 2^n \\ \\ \} \, 2^n \leq p \end{matrix}$

Si $m < 2^n$:
On applique l'hypothèse de récurrence à $\alpha + \underline{I_{n+1}}\beta \in U(n)$
avec $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^k \leq m < 2^{k+1} (m < 2^n \implies k < n)$

Alors $\begin{cases} \forall (x_1, ..., x_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}, \alpha(x_1, ..., x_{k-1}, \underline{I_k}, ..., \underline{I_n}) + \underline{I_{n+1}}\beta(x_1, ..., x_{k-1}, \underline{I_k}, ..., \underline{I_n}) > 0 \\ \\ \exists x_1, ..., x_{k-1} \in \mathbb{R}^{k-1}, \alpha(x_1, ..., x_{k-1}, \underline{I_k}, ..., \underline{I_n}) + \underline{I_{n+1}}\beta(x_1, ..., x_{k-1}, \overline{I_k}, \underline{I_{k+1}}, ...\underline{I_n}) < 0 \end{cases}$

Or $\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \alpha(x_1, ..., x_n) + \underline{I_{n+1}}\beta(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n, I_{n+1})$

Par conséquent $\begin{cases} \forall (x_1, ..., x_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}, f(x_1, ..., x_{k-1}, \underline{I_k}, ..., \underline{I_n}, \underline{I_{n+1}}) > 0 \\ \\ \exists (x_1, ..., x_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}, f(x_1, ..., x_{k-1}, \overline{I_k}, \underline{I_{k+1}}, ..., \underline{I_n}, \underline{I_{n+1}}) \end{cases}$
On a donc bien le théorème pour $n+1$

Si $2^n \leq m$

On a alors $P_{\alpha+\underline{I_{n+1}}\beta} > 0$

On applique le théorème 3.8 à $P_{\alpha+\underline{I_{n+1}}\beta}$

On a donc $\alpha + \underline{I_{n+1}}\beta$ positif sur $I_1 \times ... \times I_n$

Or $\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \alpha(x_1, ..., x_n) + \underline{I_{n+1}}\beta(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n, I_{n+1})$

On a donc $\forall (x_1, ..., x_n), f(x_1, ..., x_n, \underline{I_{n+1}}) > 0$

Soit $q = p - 2^n + 1$
On applique l'hypothèse de récurrence à $\alpha + \overline{I_{n+1}}\beta \in U(n)$ et
$q \in [\![1, 2^n - 1]\!]$
Alors $\exists x_1, ..., x_{k-1} \in \mathbb{R}^{k-1}$ tel que
$\alpha(x_1, ..., x_{k-1}, \overline{I_k}, \underline{I_{k+1}}, ...\underline{I_n}) + \underline{I_{n+1}}\beta(x_1, ..., x_{k-1}, \overline{I_k}, \underline{I_{k+1}}, ...\underline{I_n}) < 0$

Or $\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \alpha(x_1, ..., x_n) + \overline{I_{n+1}}\beta(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n, \overline{I_{n+1}})$

Par conséquent $\exists (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, f(x_1, ..., x_n, \overline{I_{n+1}}) < 0$

On a donc bien le théorème pour $n + 1$

Théorème 6.1 : Soit $f \in U(n)$, $m \in [\![1, 2^n - 1]\!], k \in \mathbb{N}$
Si $\forall i \in [\![1, m]\!], P(i)$ est négatif et $P(m + 1)$ est positif
Si $2^k \leq m < 2^{k+1}$

Alors :
$\forall (x_1, ..., x_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}, f(x_1, ..., x_{k-1}, \underline{I_k}, ..., \underline{I_n}) < 0$

$\exists (x_1, ..., x_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}$ tel que $f(x_1, ..., x_{k-1}, \overline{I_k}, \underline{I_{k+1}}, ...\underline{I_n}) > 0$

preuve :
La preuve est similaire à celle du théorème précédent

VI-.2 Algorithme intelligent

Voici le principe du choix intelligent.
L'algorithme des B-splines implique de vérifier si P est positif ou négatif.
Par conséquent il faut parcourir le vecteur P.
Ce parcours s'arrête si l'on passe d'une valeur positive à une valeur négative ou si l'on passe d'une valeur négative à une valeur positive.

Supposons que ce changement se fasse à la m ème valeur de P négativement, c'est à dire si :

$\forall i \in [\![1, m]\!], P(i)$ est positif et $P(m+1)$ est négatif

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^k \leq m < 2^{k+1}$

On applique le théorème 6.1 à P et k.

Par conséquent $\forall (x_1, ..., x_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}, f(x_1, ..., x_{k-1}, \underline{I_k}, ..., \underline{I_n}) > 0$
$\exists (x_1, ..., x_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}$ tel que $f(x_1, ..., x_{k-1}, \overline{I_k}, \underline{I_{k+1}}, ...\underline{I_n}) < 0$

On peut donc considérer que les intervalles $I_1, ..., I_{k-1}$ sont validés si les autres valeurs de f sont $\underline{I_k}, \underline{I_k}, ..., \underline{I_n}$
En revanche, il existe une valeur qui ne valide pas les conditions dans $I_1, ..., I_{k-1}$ si les autres valeurs de f sont $\overline{I_k}, \underline{I_{k+1}}, ..., \underline{I_n}$.

C'est la partie supérieur de I_k qui pose problème.
On a donc intérêt à découper I_k de façon à ne garder que la moitié inférieur(puisqu'il s'agit de la partie la plus proche de $\underline{I_k}$)

Si le changement se fait à la m ème valeur positivement, c'est à dire si :
$\forall i \in [\![1, m]\!], P(i)$ est négatif et $P(m+1)$ est positif

On applique le même raisonnement avec le théorème 6.1(bis).
On a donc intérêt à découper I_k de façon à ne garder que la moitié supérieur(puisqu'il s'agit de la partie la plus proche de $\underline{I_k}$)

Mémoire
Soit $f \in U(n), I_1, ..., I_n \in I, P$ vecteur de points de contrôle associé à $I_1, ..., I_n$ et f
Soit$m \in \mathbb{N}$

Supposons qu'un changement de signe se fasse à la $m$ème valeur de P négativement, autrement dit si
$\forall i \in [\![1, m]\!], P(i)$ est positif et $P(m+1)$ est négatif

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^k \leq m < 2^{k+1}$

On applique le théorème 6.1 à P et k.
Par conséquent $\forall (x_1, ..., x_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}, f(x_1, ..., x_{k-1}, \underline{I_k}, ..., \underline{I_n}) > 0$
$\exists (x_1, ..., x_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}$ tel que $f(x_1, ..., x_{k-1}, \overline{I_k}, \underline{I_{k+1}}, ...\underline{I_n}) < 0$

Si l'on décide découper l'intervalle I_k pour ne garder que la moitié inférieur alors on conserve $\forall (x_1, ..., x_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}, f(x_1, ..., x_{k-1}, \underline{I_k}, ..., \underline{I_n}) > 0$
On peut donc valider les 2^{k-1} premières valeurs.

Soit $(x_1, ..., x_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}$
On effectue le même raisonnement pour $f_{x_1,...,x_{k-1}} \in U(n-k+1)$

Supposons que qu'un changement se fasse à la q ème valeur de $P_{f_{x_1,...,x_{k-1}}}$ négativement autrement dit,
si $\forall i \in [\![1, q]\!], P_{f_{x_1,...,x_{k-1}}}(i)$ est positif et $P_{f_{x_1,...,x_{k-1}}}(q+1)$ est négatif

Soit $l \in \mathbb{N}$ tel que $2^l \leq q < 2^{l+1}$

On applique le théorème 6.1 à $P_{f_{x_1,...,x_{k-1}}}$ et l.
Par conséquent $\forall (x_k, ..., x_l) \in \mathbb{R}^{l-k-1}, f_{x_1,...,x_{k-1}}(x_k, ..., x_{l-1}, \underline{I_l}, ..., \underline{I_n}) > 0$
$\exists (x_k, ..., x_l) \in \mathbb{R}^{l-k-1}$ tel que $f(x_k, ..., x_{l-1}, \overline{I_l}, \underline{I_{l+1}}, ...\underline{I_n}) < 0$

Tant que $2^l ! = q$ alors on effectue ce raisonnement

Pour $n = 3$ soit $f \in U(3)$, soient $I_1, I_2, I_3 \in I$

$$\text{D'après le théorème 3.5 on a } P = \begin{pmatrix} f(\underline{I_1}, \underline{I_2}, \underline{I_3}) \\ f(\underline{I_1}, \underline{I_2}, \underline{I_3}) \\ f(\overline{I_1}, \underline{I_2}, \underline{I_3}) \\ f(\underline{I_1}, \overline{I_2}, \underline{I_3}) \\ f(\overline{I_1}, \overline{I_2}, \underline{I_3}) \\ f(\underline{I_1}, \underline{I_2}, \overline{I_3}) \\ f(\overline{I_1}, \underline{I_2}, \overline{I_3}) \\ f(\underline{I_1}, \overline{I_2}, \overline{I_3}) \\ f(\overline{I_1}, \overline{I_2}, \overline{I_3}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^8$$

$$\text{Supposons que } P \text{ soit de la forme } \begin{pmatrix} + \\ + \\ + \\ + \\ + \\ + \\ + \\ - \end{pmatrix}$$

Le changement de signe se fait donc à la 7 ème valeur.

Nous allons donc couper I_3 pour ne garder que la partie inférieure de I_3.

Soit $I_3^{'} = [\underline{I_3}, \frac{\underline{I_3}+\overline{I_3}}{2}]$
Soit $P_{I_1,I_2I_3^{'}}$ associé à f et $I_1, I_2, I_3^{'}$

$$\text{On a donc } P_{I_1,I_2I_3^{'}} = \begin{pmatrix} f(\underline{I_1}, \underline{I_2}, \underline{I_3}) \\ f(\underline{I_1}, \underline{I_2}, \underline{I_3}) \\ f(\overline{I_1}, \underline{I_2}, \underline{I_3}) \\ f(\underline{I_1}, \overline{I_2}, \underline{I_3}) \\ f(\overline{I_1}, \overline{I_2}, \underline{I_3}) \\ f(\underline{I_1}, \underline{I_2}, \frac{\underline{I_3}+\overline{I_3}}{2}) \\ f(\overline{I_1}, \underline{I_2}, \frac{\underline{I_3}+\overline{I_3}}{2}) \\ f(\underline{I_1}, \overline{I_2}, \frac{\underline{I_3}+\overline{I_3}}{2}) \\ f(\overline{I_1}, \overline{I_2}, \frac{\underline{I_3}+\overline{I_3}}{2}) \end{pmatrix}$$

Comme la première moitié de $P_{I_1,I_2I_3^{'}}$ est égale à la première moitié de P alors la première moitié de $P_{I_1,I_2I_3^{'}}$ est positive.

Prenons la 5 ième ligne de $P_{I_1,I_2I_3^{'}} = f(\underline{I_1}, \underline{I_2}, \frac{\underline{I_3}+\overline{I_3}}{2})$
Comme $f(\underline{I_1}, \underline{I_2}, \underline{I_3})$ et $f(\underline{I_1}, \underline{I_2}, \overline{I_3})$ sont positives, on applique le théorème 3.3 et 3.4 à $f_{\underline{I_1},\underline{I_2}}$
Par conséquent $f_{\underline{I_1},\underline{I_2}}$ est positive sur I_3
On a donc $f(\underline{I_1}, \underline{I_2}, \frac{\underline{I_3}+\overline{I_3}}{2})$ positive.

On a applique le même raisonnement à la 6 et 7 ième ligne de $P_{I_1,I_2I_3^{'}}$.

$$\text{On a donc bien } P_{I_1,I_2I_3^{'}} \text{ de la forme } \begin{pmatrix} + \\ + \\ + \\ + \\ + \\ + \\ + \\ * \end{pmatrix}$$

Théorème 6.2 : Soit $f \in U(n), (I_1, ..., I_n) \in I^n, m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$

Soit $I_k^{'} = [\underline{I_k}, \frac{\underline{I_k}+\overline{I_k}}{2}]$
Si $\forall i \in [\![1, m]\!], P_{I_1,...,I_n}(i)$ est positif et $P_{I_1,...,I_n}(m+1)$ est négatif
Si $2^k \leq m < 2^{k+1}$

alors $\forall i \in [\![1,m]\!], P_{I_1,\dots,I_{k-1},I'_k,I_{k+1},\dots,I_n}(i)$ est positif

On peut donc commencer le parcours du $P_{I_1,\dots,I_{k-1},I'_k,I_{k+1},\dots,I_n}$ à la m ième valeur puisque nous savons que celles d'avant sont positives.

Voici l'algorithme du choix intelligent :

ChoixIntelligent($imemoire$)
$trouve = faux$
$i = imemoire$
$imemoire = 1$
Tant que($trouve = faux$)
  Si($S(P(i))! = S(P(i+1))$)
    $k = 0$
    Tant que $k \leq n$
      Si($2^k \leq i < 2^{k+1}$)
        Si($S(P(i) > S(P(i+1))$)
          On remplace I_k par la première moitié de I_k
          $imemoire = i$
          $trouve = vrai$
        Sinon
          On remplace I_k par la seconde moitié de I_k
          $trouve = vrai$
        fsi
      fsi
      $k = k + 1$
    ftantque
  fsi
  $i = i + 1$
ftantque
Renvoie $imemoire$

Voici la forme générale de l'algorithme B-spline avec le découpage intelligent :

$solution = faux$
$imemoire = 1$
Tant que($solution = faux$)
  On calcule $P_{controle} = B^{-1}X$
  Si ($P > 0$)
    $solution = vrai$
  Sinon
    $imemoire$=ChoixIntelligent($imemoire$)
  fsi
ftantque

VI-.3 Test

Intervalle de départ : $[-10, 10], [-10, 10]$
NDB : nombre d'itération pour la méthode B-spline bête
I_1B : intervalle solution de I_1 pour la méthode B-spline bête
I_2B : intervalle solution de I_2 pour la méthode B-spline bête
NDBI : nombre d'itération pour la méthode B-spline intelligente
I_1BI : intervalle solution de I_1 pour la méthode B-spline intelligente
I_2BI : intervalle solution de I_2 pour la méthode B-spline intelligente

$f(x_1, x_2)$	NDB	I_1B	I_2B	NDBI	I_1BI	I_2BI
$1 + x_1 + x_2 + x_1x_2$	2	[0,10]	[0,10]	2	[0,10]	[0,10]
$-1 + x_1 + x_2 + x_1x_2$	3	[0,10]	[5,10]	3	[0,10]	[5,10]
$1 - x_1 + x_2 + x_1x_2$	4	[5,10]	[5,10]	4	[5,10]	[5,10]
$1 + x_1 - x_2 + x_1x_2$	4	[5,10]	[5,10]	4	[5,10]	[5,10]
$1 + x_1 + x_2 - x_1x_2$	4	[5,10]	[-10,-5]	10	[0,0.625]	[8.75,10]
$1 - x_1 + x_2 - x_1x_2$	4	[5,10]	[-10,5]	9	[0,0.625]	[8.75,10]
$1 + x_1 - x_2 - x_1x_2$	4	[5,10]	[-10,-5]	9	[8.75,10]	[0,0.625]
$1 - x_1 - x_2 - x_1x_2$	5	[5,10]	[-5,-2.5]	9	[-2.5,-1.25]	[8.75,10]
$-1 - x_1 - x_2 - x_1x_2$	5	[5,10]	[-5,-2.5]	78	[-2.5,-1.25]	[8.75,10]

VII- Conclusion

Le problème initial à résoudre est un problème de recherche d'intervalle sous contrainte.
Ne pouvant le résoudre théoriquement, on s'emploie à le résoudre via un algorithme.
Deux méthodes de résolution ont été mises en place : la méthode d'analyse par intervalles et la méthode B-spline.
La méthode B-spline ne s'applique qu'à des contraintes sous forme polynomiale.
En revanche, la méthode B-spline est plus rapide que la méthode d'analyse par intervalle.
De plus la méthode B-spline peut être amélioré et amener à une résolution progressive du problème
Les tests effectués en deux dimensions prouvent ces résultats.
Il faudrait effectuer des tests en plus grandes dimensions pour pouvoir confirmer ces résultats.
On peut également tester la méthode B-spline sur des fonctions polynomiales plus complexes.
Les matrices B-splines seront plus grande mais le principe de récurrence sera le même.

VIII- Bibliographie

Luc Jaulin,Michel Keifer, Olivier Didrit and Eric Walter.*Applied Interval Analysis.*
Sébastien Lengagne,Rawan Kalawoun,François Bouchon,Youssef Mezouar.*Reducing pessimism in*
Rawan Kalawoun.*Motion planning of multiple robotic system forair-plane stripping*