Rapport Projet GMM 4A: Analyse par intervalle appliquée à la robotique

Clément Brochand, Quentin Odoul

23 avril 2018

POLYTECH
CLERMONT-FERRAND

Table des matières

Résumé

L'analyse par intervalle est un outil assez récent qui permet la résolution de multiples problèmes non-linéaires. Elle obéit à des règles de calculs qui lui sont propres. Cette méthode est omniprésente en robotique et de nombreux algorithmes sont basés sur celle-ci. En effet, dans le cadre de ce projet il s'agit d'étudier les zones réellement atteignables par le bras d'un robot muni d'articulations soumises à des contraintes. Comme exemple d'une application concrète en 2D on peut considérer un robot de peinture constitué d'un bras articulé. Le problème avec cette technique est qu'elle donne parfois des intervalles contenant de points non atteignables par le robot, en d'autres termes on est assuré que l'intervalle que l'on a contient tout les points accessibles mais pas que tout les points contenus sont accessibles. La problématique est donc d'obtenir un intervalle ou une intersection d'intervalles dans lequel on est sûr que l'extrémité du bras articulé peut se rendre à partir de celui dans lequel chaque articulation peut se déplacer. Pour reprendre l'exemple du robot de peinture, la base du bras de celui-ci se déplace dans un rail qui, avec les intervalles dans lesquels peuvent bouger les articulations constituent notre intervalle de départ, chacune de ces articulations apportant une contrainte sur une nouvelle variable et donc une dimension de plus à notre intervalle de départ. L'extrémité du bras est équipée d'une brosse de peinture et la zone couverte par celle-ci correspond à la zone qui nous intéresse le plus : l'intervalle d'arrivée.

1 Introduction

Nous avons passé un certain temps à nous documenter sur l'analyse par intervalle. Nous avons pour ce faire notamment fondé notre travail de documentation sur le MOOC, réalisé par Luc Jaulin à ce propos. Ces vidéos ainsi que l'article "Constraint satisfaction problem using Bsplines interval interval analysis : Application to reachability problem of 2D robots" nous ont permis de nous familiariser avec l'analyse par intervalle et notamment la notion de pessimisme, responsable de la différence entre l'intervalle obtenu et celui réellement et totalement atteignable. Nous reviendrons plus en détail la dessus par la suite. Nous avons ensuite passé un certain temps à bien comprendre la problématique du sujet et surtout à la traduire et à le formaliser mathématiquement. Nous avons enfin exploré des possibilités de résolution : notamment une méthode de bissection et une technique impliquant des variables intermédiaires.
Un des points qui a fait que nous avons mis beaucoup de temps à comprendre le problème est que quand il nous a été présenté, les fonctions qu'elles associent un intervalle à un intervalle ou un réel à un réel étaient notées pareillement. Dans la suite, pour une meilleure compréhension pour une fonction f, on notera $\check{f}$ la fonction avec la même expression mais qui associe un intervalle à un autre intervalle.
Un intervalle est un objet mathématique particulier pour bien comprendre la suite nous allons donc rappeler les règles de calcul pour effectuer des opérations sur les intervalles : Soient les intervalles $[\underline{x};\overline{x}]$ et $[\underline{y};\overline{y}]$, alors :

- $[\underline{x};\overline{x}] + [\underline{y};\overline{y}] = [\underline{x}+\underline{y};\overline{x}+\overline{y}]$
- $-[\underline{x};\overline{x}] = [-\overline{x};-\underline{x}]$
- $[\underline{x};\overline{x}] - [\underline{y};\overline{y}] = [\underline{x}-\overline{y};\overline{x}-\underline{y}]$
- $[\underline{x};\overline{x}]\times[\underline{y};\overline{y}] = [min(\underline{x}\times\underline{y},\underline{x}\times\overline{y},\overline{x}\times\underline{y},\overline{x}\times\overline{y});max(\underline{x}\times\underline{y},\underline{x}\times\overline{y},\overline{x}\times\underline{y},\overline{x}\times\overline{y})]$
- $[\underline{x};\overline{x}]^2 = \begin{cases} [min(\underline{x}^2,\overline{x}^2);max(\underline{x}^2,\overline{x}^2)] \text{ si } 0 \notin [\underline{x};\overline{x}] \\ [0;max(\underline{x}^2,\overline{x}^2)] \text{ sinon} \end{cases}$
- $1/[\underline{x};\overline{x}] = [min(1/\underline{x},1/\overline{x});max(1/\underline{x},1/\overline{x})]$ si $0 \notin [\underline{x};\overline{x}]$
- $\sqrt{[\underline{x};\overline{x}]} = [\sqrt{\underline{x}};\sqrt{\overline{x}}]$ si $0 \leq \underline{x}$

Mathématiquement, une opération entre 2 intervalles se caractérise de la manière suivante : Pour l'opération $[a,b]\times[c;d]=[e;f]$ cela signifie concrètement que si on prend $x\in[a,b]$ et $y\in[c;d]$, alors $x+y\in[e;f]$.

2 Explication et formalisation du problème

Pour formaliser mathématiquement le problème, on nomme X l'espace de départ. Cet espace est de dimension égale au nombre de contraintes exercées sur le robot et donc à son nombre d'articulation. Nous considérerons ici cet espace de dimension 1, il correspond donc en quelque sorte à l'intervalle dans lequel la base du bras du robot se déplace. De la même manière, on nomme Y l'espace d'arrivée (donc celui correspondant aux zones supposées accessibles par l'extrémité du bras). Un problème est associé à une fonction $\check{f}$ de X dans Y. Dans notre cas, nous avons étudié des polynômes de degré 2 en une seule dimension. Précisons toutefois que dans des cas concrets, l'espace de départ aura souvent plus d'une dimension et il est facile de voir que la fonction associée contiendra souvent des termes en *cos* et en *sin* au vu de la structure d'un bras robotique. Pour notre part, nous sommes dans le cadre de ce projet principalement intéressés à la fonction associée à l'équation suivante :
$y = x^2 - 2x + 2$
Écrit mathématiquement le problème est donc le suivant :
On a $\check{f}(X) \subset Y$ et on voudrait $\check{f}(X) = Y$.

2.1 Notion de pessimisme

Le problème exposé précédemment est causé par le pessimisme. En analyse par intervalle, lorsque il y a plusieurs occurrences d'une même variable dans une fonction, on est confronté à ce principe. Il suffit donc d'une seule variable dans l'espace de départ pour le constater, ce qui justifie pourquoi nous avons décidé de commencer par nous intéresser à une fonction d'une seule variable. Pour mieux comprendre de quoi il en retourne, prenons l'exemple suivant :
On considère le problème :

$$\begin{cases} \check{f}(X) = (X-1)^2 \\ X = [-1;1] \end{cases}$$

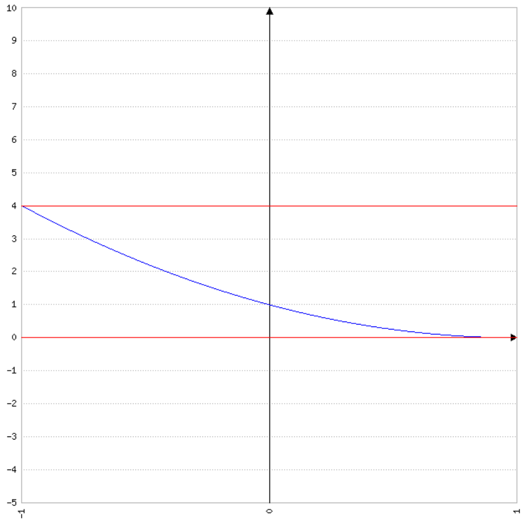
Cela nous donne donc $Y = [0;4]$

Or, si on développe l'expression de f, on obtient :

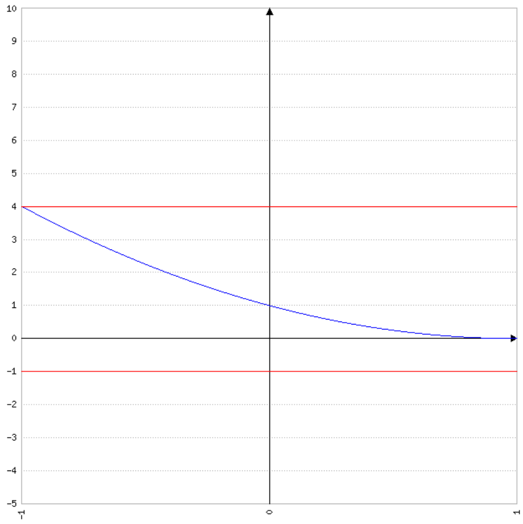
$$\begin{cases} \check{f}(X) = X^2 - 2X + 1 \\ X = [-1;1] \end{cases}$$

En appliquant les règles de calcul avec les intervalles on obtient alors $Y = [-1; 4]$

Graphiquement, on obtient alors l'intervalle ci-dessous sans pessimisme :

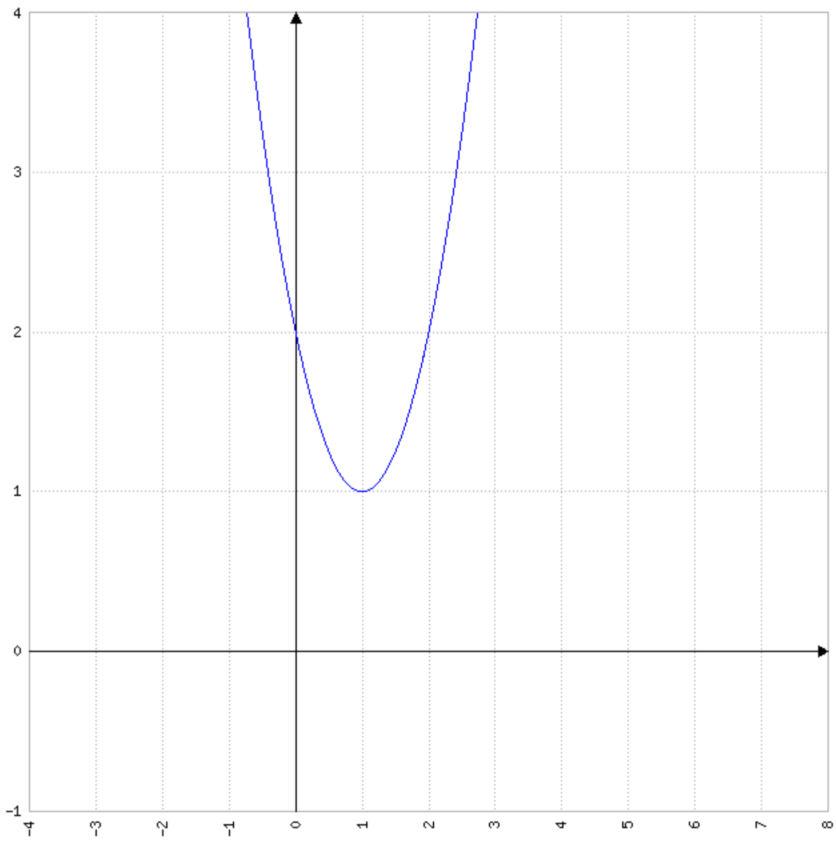


Avec le pessimisme, nous avons un intervalle plus grand :

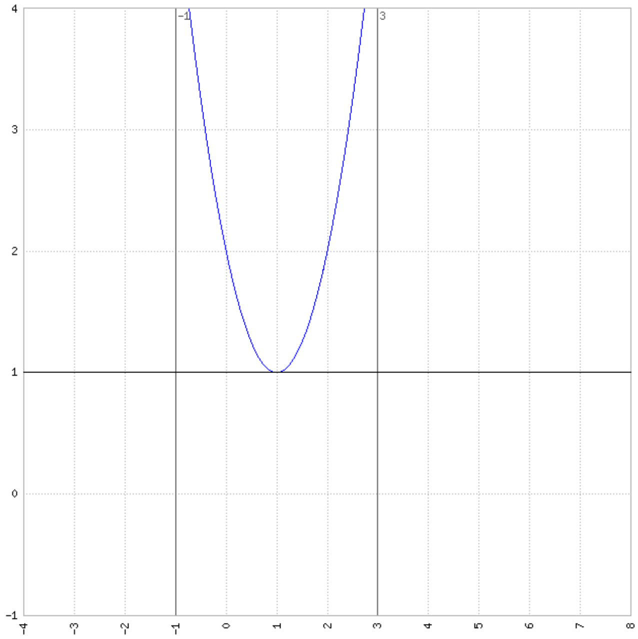


2.2 Problème initial

Pour bien comprendre la démarche de notre projet, il faut d'abord comprendre ce que l'on appelle problème initial. On se donne une équation avec y en fonction de x (ici nous avons donc choisi $y = x^2 - 2x + 2$). On prend x dans l'intervalle de départ X et on veut y dans l'intervalle d'arrivée Y. Nous avons décidé de prendre ici $x \in [-4; 8]$ et $y \in [-1; 4]$. L'intervalle X correspond à l'ensemble des possibilités de déplacement pour le bras robotique. L'intervalle Y est volontairement trop grand pour être sûr d'inclure toutes les zones que l'on veut atteindre, tout en contenant des zones qui ne sont pas réellement atteignables (on voit facilement ici que les zones situées en dessous de la droite $y = 1$ ne seront pas atteignables alors qu'on a pris $y \in [-1; 4]$). Le but est alors de réduire au maximum l'intervalle dans lequel y est contenu pour avoir les zones réellement atteignables et donc réduire aussi celui de x pour avoir uniquement les parties de X qui nous intéressent. En reprenant notre exemple, on a une courbe qui ressemble à ceci :



Nous comprenons alors que les intervalles de x et y, qui représentent la fenêtre en entier ci-dessus, peuvent être réduits. Graphiquement, nous voyons clairement que l'on peut prendre $x \in [-1; 3]$ et $y \in [1; 4]$ comme de meilleurs intervalles.



Nous devons donc chercher une méthode mathématique peu coûteuse permettant d'avoir un ensemble d'intervalles qui correspond à la zone souhaitée. Nous verrons par la suite que la méthode de la bissection permet d'obtenir une bonne approximation de celle-ci, cependant il reste des zones non atteignables par le robot.

2.3 Problème dual

L'enjeu de ce projet tel qu'on nous l'a présenté est de réussir la modélisation d'un problème que l'on appellera problème dual. Celui-ci prend en entrée nos intervalles X et Y mais également d'autres variables que l'on pose pour que la résolution de ce problème, qui va déboucher comme nous le verrons sur un système d'équation nous permette de réduire directement les intervalles de x et de y. Le but du projet est de poser correctement ce problème dual. Nous avons en particulier travaillé en essayant de rajouter des variables "intermédiaires" au problème initial pour obtenir le problème dual. Nous expliquerons par la suite ce en quoi cela consiste exactement.

Dans notre exemple le problème dual est sous la forme :

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 2 \\ x \in [-4; 8] = X \\ y \in [-1; 4] = Y \end{cases}$$

3 Méthodes de résolution

Au cours ce projet, nous avons donc tenté de trouver des méthodes qui permettent d'obtenir et optimiser la zone atteignable par un robot. Nous avons tout d'abord essayé d'ajouter des variables intermédiaires avec les équations que nous avions, puis une résolution avec une méthode de bissection à la fois sur le problème initial et dual.
Passons maintenant à un point que nous avons mis beaucoup de temps à comprendre et sans lequel nous ne comprenions pas vraiment la problématique de ce projet. Celui-ci est posé par l'utilisation de l'analyse par intervalle.
Prenons pas exemple l'intervalle $[-1; 2]$:

On a $\check{f}([-1; 2]) = [-1; 2]^2 - 2 \times [-1; 2] + 2 = [-4; 8]$
Cependant, alors qu'on a $[-1; 2] = [-1; 0] \bigcup [0; 2]$,
$\check{f}([-1; 2]) = \check{f}([-1; 0] \cup [0; 2]) \neq \check{f}([-1; 0] \bigcup \check{f}([0; 2])$
En effet $\check{f}([-1; 0]) = [2; 5]$ et $\check{f}([0; 2]) = [-2; 6]$

Lorsque l'on veut résoudre notre problème par bissection, avec donc $Y = [-1; 4]$, le résultat de cette bissection va être un intervalle I qui sera en fait une réunion d'intervalles. On aura donc $I = \bigcup\limits_{k=1}^{p} I_k$,
avec $\forall k \in [\![1; p]\!]$, $\check{f}(I_k) \subset [-1; 4]$

Par conséquent, conformément à ce que l'on a dit précédemment,
$\bigcup\limits_{k=1}^{p} \check{f}(I_k) \subset [-1; 4]$ alors que $\check{f}(\bigcup\limits_{k=1}^{p} I_k) \not\subset [-1; 4]$
Cependant $f(I) \subset [-1; 4]$ car cela signifie simplement $\forall x \in I, f(x) \in [-1; 4]$ puisque la fonction f manipule des réels.
On a donc $f(I) = f(\bigcup\limits_{k=1}^{p} I_k) = \bigcup\limits_{k=1}^{p} f(I_k) \subset \bigcup \check{f}(I_k) \subset [-1; 4]$.

3.1 Méthode des variables intermédiaires

La méthode basée sur les variables intermédiaires consiste à modifier l'équation de base en ajoutant de nouvelles variables à l'intérieur. Ceci donne lieu à un nouveau système d'équations où les nouvelles variables appartiennent à des intervalles différents de ceux de départ.

Reprenons l'exemple de notre problème dual :

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 2 \\ x \in [-4; 8] \\ y \in [-1; 4] \end{cases}$$

Ici nous allons ajouter les variables α et β telles que :

$$\begin{cases} \alpha = y - 2 \ (= x^2 - 2x) \\ \beta = y + 2x - 2 \ (= x^2) \end{cases}$$

Nous avons donc deux nouveaux systèmes :

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 2 \in [-1; 4] \\ \alpha = y - 2 \in [-3; 2] \\ \beta = y + 2x - 2 \in [-11; 18] \\ x \in [-4; 8] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 2 \in [-1; 4] \\ \alpha = x^2 - 2x \in [-16; 72] \\ \beta = x^2 \in [0; 64] \\ x \in [-4; 8] \end{cases}$$

En faisant l'intersection des deux intervalles de α et des deux intervalles de β nous obtenons :

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 2 \in [-1; 4] \\ \alpha = x^2 - 2x \in [-3; 2] \\ \beta = x^2 \in [0; 18] \\ x \in [-4; 8] \end{cases}$$

Grâce à ce système, nous obtenons un nouvel intervalle de X réduit.

$x^2 \in [0; 18] \Rightarrow x = [-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]$

On peut ensuite réinjecter cette nouvelle valeur de x dans le système, ce qui va nous donner de nouvelles valeurs pour l'intervalle de β.

En réitérant ce procédé nous nous rendons compte que seules la borne supérieure de β et les bornes de l'intervalle de x vont changer, la borne inférieure de β étant toujours nulle. Nous avons en fait :

1) $x \in [-\sqrt{\beta}; \sqrt{\beta}]$

2) $\overline{\beta} \leftarrow 2 + 2\overline{x}$

(où $\overline{\beta}$ et $\overline{x}$ sont respectivement les bornes supérieurs des intervalles de β et de x)

Lorsque nous répétons ce procédé une infinité de fois, l'intervalle X va tendre vers une limite.

On a :

$$\begin{cases} \overline{\beta} \leftarrow 2 + 2\overline{x} \ (l_1) \\ \overline{x} \leftarrow \sqrt{\overline{\beta}} \ (l_2) \end{cases}$$

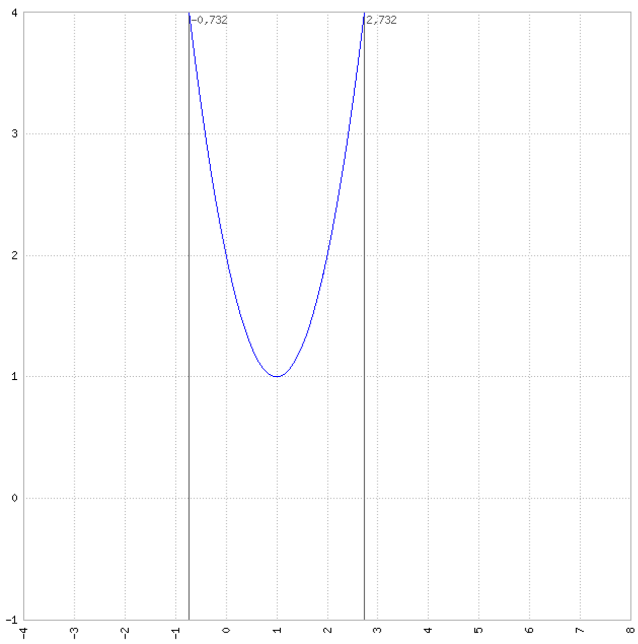
D'où

$$\begin{cases} l_2^2 = l_1 \\ l_1 = 2 + 2 \times l_2 \end{cases}$$

$l_2^2 = 2 + 2 \times l_2 \Leftrightarrow l_2^2 - 2 - 2 \times l_2 = 0$

En résolvant cette équation, nous avons alors un intervalle de X minimal pour ce problème :

$x \in [1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}]$



Cette méthode a pour avantage de réduire rapidement l'intervalle X pour des équations du même ordre, cependant il ne peut pas y avoir d'amélioration sur celui de Y.

3.2 Bissection

La méthode de bissection consiste a prendre des intervalles "trop larges" à la base, puis à couper en deux ces intervalles à chaque itération où l'intervalle obtenu n'est que partiellement à l'intérieur de la zone souhaitée. On recalcule la zone atteinte en partant de ces sous-intervalles (en utilisant évidemment toujours la même fonction), et on garde ceux dont l'image est entièrement dedans lors qu'on rejette ceux pour lesquels celle-ci sont entièrement dehors. Pour ce qui est de ceux qui sont à moitié dedans et à moitié dehors, on réitère en les coupant à nouveau en deux et ainsi de suite. Concrètement, on ne peut pas couper ces intervalles à l'infini et bien souvent on n'obtiendra jamais de situation dans laquelle à partir d'un certain nombre d'itérations on a tous les intervalles totalement dedans ou totalement dehors. Il faut donc se fixer un niveau de précision souhaité pour la bissection à partir duquel on arrête d'itérer et on garde uniquement les intervalles contenus dans la zone souhaitée.

Nous allons donner les premières étapes d'une bissection sur le problème initial, on réalise la bissection sur $X = [-4; 8]$. L'intervalle d'arrivée voulu étant $Y = [-1; 4]$:

1)
- $\check{f}[-4; 2] = [-4; 2]^2 - 2 \times [-4; 2] + 2 = [-2; 26]$
- $\check{f}[2; 8] = [2; 8]^2 - 2 \times [2; 8] + 2 = [-10; 62]$

Après la première itération, on constate que les deux intervalles sont partiellement dedans. On effectue donc une nouvelle bissection sur les deux intervalles obtenus.

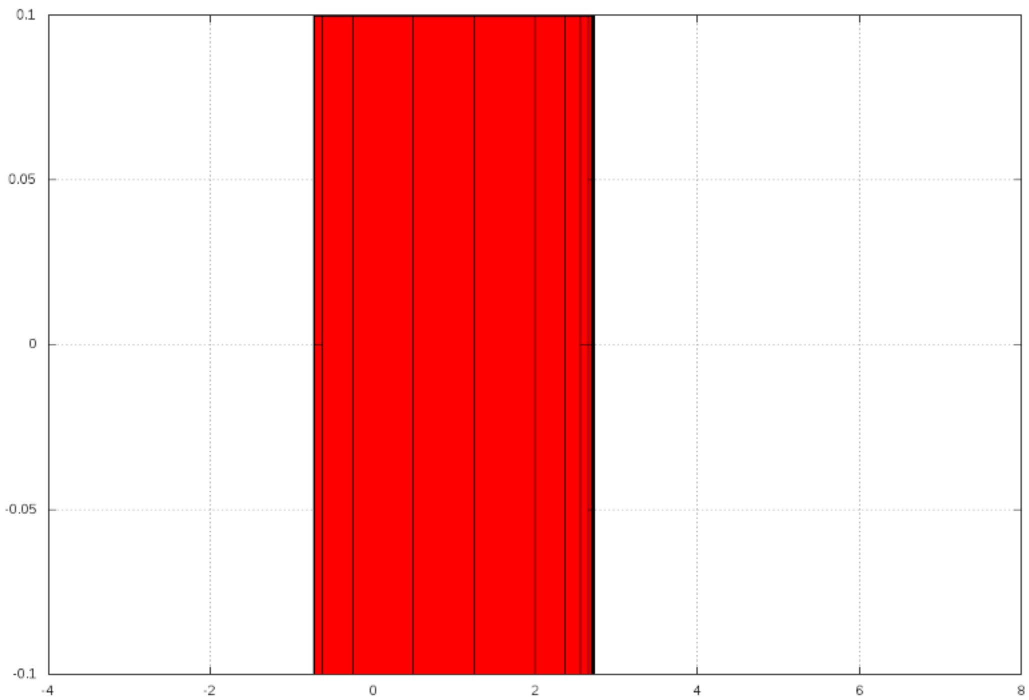
2)
- $\check{f}[-4; -1] = [-4; -1]^2 - 2 \times [-4; -1] + 2 = [5; 26]$
- $\check{f}[-1; 2] = [-1; 2]^2 - 2 \times [-1; 2] + 2 = [-2; 8]$
- $\check{f}[2; 5] = [2; 5]^2 - 2 \times [2; 5] + 2 = [-4; 23]$
- $\check{f}[5; 8] = [5; 8]^2 - 2 \times [5; 8] + 2 = [11; 56]$

Ici on constate directement que les intervalles $[5; 26]$ et $[11; 56]$ ne sont pas inclus dans $[-1; 4]$, on exclut donc le premier et le dernier quart de notre intervalle X. On continue donc la bissection sur les deux autres sous-intervalles qui sont partiellement inclus : $[-1; 2]$ et $[2; 5]$.

3)
- $\check{f}[-1; 0.5] = [-1; 0,5]^2 - 2 \times [-1; 0,5] + 2 = [1; 5]$
- $\check{f}[0,5; 2] = [0,5; 2]^2 - 2 \times [0,5; 2] + 2 = [-1,75; 5]$
- $\check{f}[2; 3,5] = [2; 3,5]^2 - 2 \times [2; 3,5] + 2 = [-1; 10,25]$
- $\check{f}[3,5; 5] = [3,5; 5]^2 - 2 \times [3,5; 5] + 2 = [4,25; 20]$

Ici nous avons un seul sous-intervalle à exclure directement : $[4,25; 20]$. Les trois autres sous-intervalles sont à bissecter à nouveau. Cette bissection est à effectuer jusqu'à obtenir un seuil de précision satisfaisant.

Voici le résultat graphique de cette bissection réalisée sur machine.

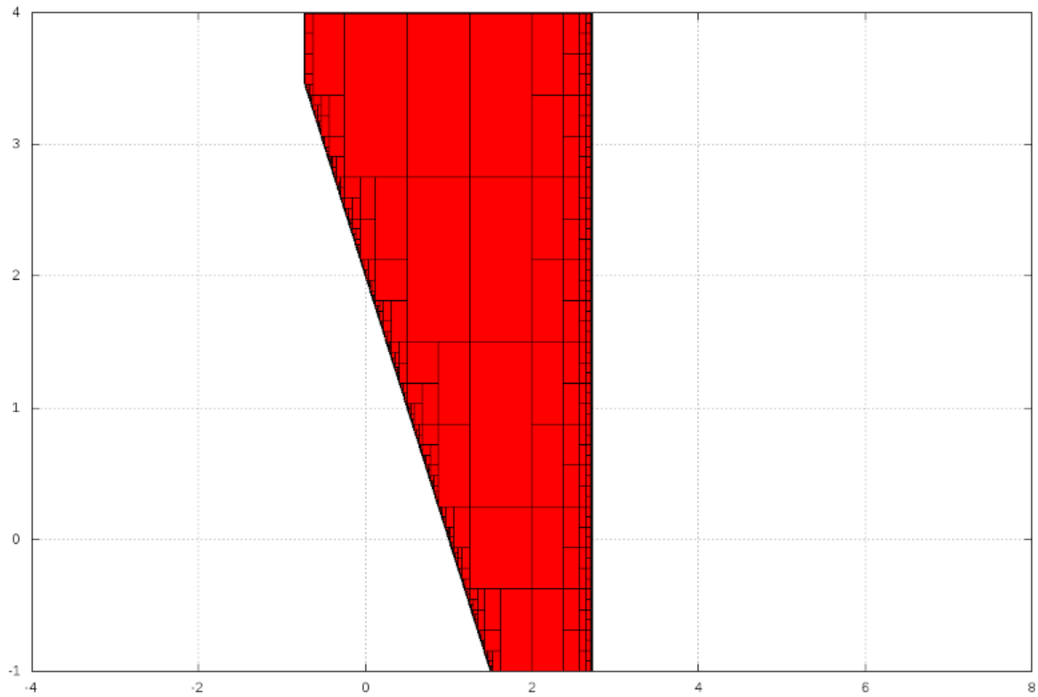


Cette bissection sur le problème initial nous permet donc de réduire l'intervalle de X. Comme le montre le graphique, la borne inférieure de cet intervalle tend vers $1 - \sqrt{3}$ et la borne supérieure tend vers $1 + \sqrt{3}$. Cet intervalle de X correspond bien à l'intervalle théorique trouvé avec la méthode des variables intermédiaires.

Cependant comme on peut le voir la bissection sur le problème initial nous permet seulement de réduire l'intervalle de X. Nous avons donc rajouté les contraintes supplémentaires du problème dual obtenues avec la méthode des variables intermédiaires :

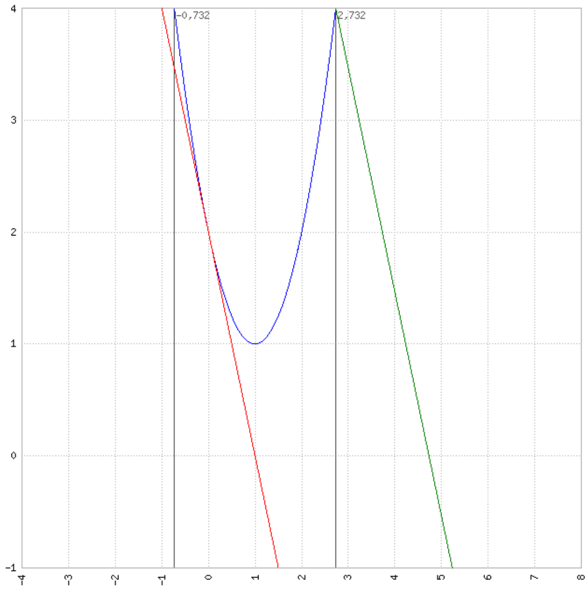
$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 2 \in [-1; 4] \\ y - 2 = x^2 - 2x \in [-3; 2] \\ x^2 = y + 2x - 2 \in [0; 4 + 2\sqrt{3}] \\ x \in [-4; 8] \end{cases}$$

En faisant une bissection sur ces nouvelles équations, nous obtenons le graphique suivant :



Nous avons déjà la contrainte du problème initial qui limite l'intervalle X à $[1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}]$. On constate que le graphique est uniquement coupé par la droite d'équation $y=-2x+2$ qui par ailleurs correspond à la tangente de la courbe d'équation $y=x^2-2x+2$ en 0.
Cette coupe nous est donnée par la contrainte $x^2=y+2x-2\in[0;4+2\sqrt{3}]$. Cette équation nous donne en réalité deux droites correspondant aux deux bornes de $[0;4+2\sqrt{3}]$ mais la seconde droite, d'équation $y=-2x+6+2\sqrt{3}$ ne réduit pas notre intervalle car elle ne le rencontre qu'en un point, l'extrémité $(1+\sqrt{3};4)$ de celui-ci.

Voici une représentation graphique avec les deux droites correspondantes, en rouge la droite $y = x^2 - 2x + 2$ et en vert la droite $y = -2x + 6 + 2\sqrt{3}$.



La contrainte $y - 2 = x^2 - 2x \in [-3; 2]$, ne réduit elle pas du tout notre intervalle.
On constate donc que même si nous avons considérablement réduit la taille de notre intervalle de départ, cette méthode ne nous a pas permis de réduire l'intervalle Y de manière satisfaisante.
En effet on remarque simplement qu'avec l'équation $y = x^2 - 2x + 2$, la borne inférieure de Y ne devrait pas être inférieure à 1.
Une solution dans ce cas serait de "tricher" en factorisant cette expression de la manière suivante : $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$, en procédant ainsi on élimine les problèmes liés au pessimisme. Cependant dans un cadre plus général, cette simplification sera très rarement possible.
Une autre idée serai de rajouter dans cette bissection la contrainte donnée par l'équation $y - x^2 + 2x = 2$, qui correspondrait aux points de la courbe de f, cependant c'est extrêmement coûteux et peu pertinent car on a une égalité entre un intervalle et un réel.

4 Conclusion

Au cours de ce projet, nous avons découvert un nouvel outil qui est l'analyse par intervalle. Il nous a fallu un peu de temps pour nous y habituer mais surtout beaucoup de temps pour comprendre la véritable problématique du projet. Ceci vient du fait qu'il fallait modéliser rigoureusement le problème mathématique associé. Nous avons donc exploré peu de méthodes de résolution sur un exemple précis et obtenu des résultats pas totalement satisfaisants. En effet, on arrive à améliorer rapidement l'intervalle de départ mais nous n'avons pas une optimisation complète de l'intervalle d'arrivée. Par manque de temps nous n'avons pas pu travailler sur d'autres types de fonction. Les méthodes que nous avons utilisées ne sont pas applicables à tout type de fonction mais nous n'avons pas trouvé d'autres pistes de résolution pour modéliser le problème dual et répondre à la problématique.
Ce projet nous a permis d'explorer un domaine inhabituel pour nous et de chercher des pistes de résolution mathématique sur un problème concret de robotique. Nous ne nous attendions pas vraiment en choisissant ce sujet à effectuer ce type de travail, finalement très atypique par rapport aux autres projets et très différent de ce que nous avions fait l'année dernière, notamment car la partie purement mathématique de ce projet est finalement assez réduite. Cependant le travail que nous avons effectué, même si les résultats obtenus ne sont pas à la hauteur de nos attentes fut très enrichissant.