Polytech Clermont-Ferrand

Rapport de projet

Matrices de Kronecker - Application à la robotique

Mallaury SAUTEREAU
Marie-Noël CHANTHAVONG

Tuteur : M. Bouchon
GMM4A

May 18, 2018

Résumé

Dans le cadre de notre projet, nous avons travaillé sur un article traitant un problème de robotique. En effet, l'objectif de l'article est de calculer la zone atteignable d'un bras robotisé en respectant un certain nombre de contraintes. Le temps de calcul informatique étant trop long, nous exposons dans ce rapport une méthode de calculs plus rapide basée sur l'utilisation de produits de Kronecker. Nous présentons premièrement des notions de base concernant les produits de Kronecker et les fonction Bsplines avant de traiter la résolution de systèmes linéaires à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

Abstract

In the framework of our project, we worked on an article about robotic. Indeed, the article's objective is to compute the feasible space of a robotic system regarding a set of constraints. The time of computing being too long, we show in this report a method of computing more rapid, based on the Kronecker's product. Firstly, we present basic notions about Kronecker product and Bsplines functions before treating the resolution of linear systems thanks to Gauss' method.

Table des matières

1 Introduction

Pour ce projet, nous nous sommes intéressées à des problèmes de robotique, consistant à étudier les zones que peut atteindre l'extrémité d'un bras d'un robot muni de plusieurs articulations sous un certain nombre de contraintes. Nous avons pour cela travaillé en collaboration avec Mme Rawan Kalawoun, Mr Sébastien Lengagne et Mr François Bouchon sur un article intitulé "Constraint Satisfaction Problem using Bsplines Interval Analysis : Application to reachability problem of 2D robots".

Afin de résoudre ce type de problème, ils utilisent les méthodes de bissection et de contraction de l'analyse par intervalles qui entraîne cependant un important pessimisme. Ils proposent alors dans l'article une nouvelle méthode basée sur la propriété de l'enveloppe convexe des fonctions Bsplines et de la résolution d'un produit de Kronecker itératif, permettant ainsi de réduire ce pessimisme et le temps de calcul informatique.

Les fonctions Bsplines sont définies à l'aide de fonctions de base et de points de contrôles. Une courbe Bspline est entièrement comprise dans l'enveloppe convexe formée par ces points de contrôles.

Cependant, ces points de contrôles sont inconnus. On peut les déterminer grâce à l'équation suivante : $P = B^{-1}X$, où P est le vecteur des points de contrôles, B la matrice contenant les paramètres polynomiaux des fonctions Bsplines de bases et X le vecteur des coefficients polynomiaux.

Dans ce cas, B peut s'écrire de la manière suivante : $B = B_1 \otimes B_2 \otimes \ldots B_i \otimes \ldots B_n$, où n désigne le nombre d'articulations que possède le bras robotisé et $\otimes$ le produit de Kronecker.

Trouver les points de contrôles représentés par le vecteur P revient à résoudre le système suivant :

$$P = B^{-1}X = (B_1 \otimes B_2 \otimes \ldots B_i \otimes \ldots B_n)^{-1}X$$

L'objectif est de résoudre le plus rapidement possible ce système. Une première propriété sur le produit de Kronecker permet d'écrire la relation suivante :

$$(B_1 \otimes B_2 \otimes \ldots B_i \otimes \ldots B_n)^{-1}X = (B_1^{-1} \otimes B_2^{-1} \otimes \ldots B_i^{-1} \otimes \ldots B_n^{-1})X$$

Nous proposons dans ce rapport une résolution basée sur la méthode du pivot de Gauss qui permet de ne pas inverser les matrices B_i. Nous présentons donc premièrement les principales propriétés du produit de Kronecker ainsi que la propriété de l'enveloppe convexe concernant les fonctions Bsplines. Puis, nous présentons une méthode permmettant de résoudre des systèmes du type :

$$(B_1 \otimes B_2 \otimes \ldots B_i \otimes \ldots B_n)X = Y.$$

2 Produit de Kronecker

2.1 Définition et exemples

Définition 1. *Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. Le* ***produit de Kronecker*** *de A et B est défini par :*

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \ldots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \ldots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

Exemple 1. *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. *Alors :*

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} B & 2B & 3B \\ 3B & 2B & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 6 & 9 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2. *Soit* $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. *Pour toute matrice identité* I_n, *le produit de Kronecker de* I_n *par* B *donne une matrice diagonale par bloc avec* n *fois la matrice* B *le long de la diagonale. Par exemple :*

$$I_2 \otimes B = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Exemple 3. *Soit* B *une matrice de taille 2 quelconque. Alors :*

$$B \otimes I_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & b_{12} & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Exemple 4. *Soient* $x \in \mathbb{R}^m$ *et* $y \in \mathbb{R}^n$. *Alors :*

$$x \otimes y = \begin{pmatrix} x_1 y^T, \dots, x_m y^T \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_1 y_1, \dots, x_1 y_n, x_2 y_1, \dots, x_2 y_n, x_m y_1, \dots, x_m y_n \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^{mn}.$$

Exemple 5. *Soient* $x \in \mathbb{R}^m$ *et* $y \in \mathbb{R}^n$. *Alors :*

$$x \otimes y^T = \begin{pmatrix} x_1 y, \dots, x_m y \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & \dots & x_1 y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m y_1 & \dots & x_m y_n \end{pmatrix} = x y^T \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

2.2 Propriétés

Théorème 1. *Soient* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *et* $D \in \mathcal{M}_{s,t}(\mathbb{R})$. *Alors :*

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD \ (\in \mathcal{M}_{mr,pt}(\mathbb{R})).$$

Preuve. *Soient* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *et* $D \in \mathcal{M}_{s,t}(\mathbb{R})$

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11}D & \dots & c_{1p}D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}D & \dots & c_{np}D \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} c_{k1} BD & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} c_{kp} BD \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk} c_{k1} BD & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk} c_{kp} BD \end{pmatrix} = AC \otimes BD.$$

Propriété 1. *Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,$B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{R})$. Le produit de Kronecker est associatif :*

$$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$$

Théorème 2. *Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on a :*

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T.$$

Preuve. *Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.*
On a :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \textit{ et } B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix}$$

On sait que :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

Alors

$$(A \otimes B)^T = \begin{pmatrix} a_{11}B^T & \dots & a_{m1}B^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}B^T & \dots & a_{mn}B^T \end{pmatrix}$$

Or,

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \textit{et } B^T = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{p1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1q} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix}$$

On a :

$$A^T \otimes B^T = \begin{pmatrix} a_{11}B^T & \dots & a_{m1}B^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}B^T & \dots & a_{mn}B^T \end{pmatrix}$$

D'où,

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$$

Corollaire 1. *Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ sont symétriques alors $A \otimes B$ est symétrique.*

Preuve. *Si A et B sont symétriques alors $A = A^T$ et $B = B^T$. On a alors : $A \otimes B = A^T \otimes B^T$. Et d'après le théorème 2 : $A^T \otimes B^T = (A \otimes B)^T$. On a montré que : $A \otimes B = (A \otimes B)^T$. Donc $A \otimes B$ est symétrique.*

Théorème 3. *Si les matrices A et B sont inversibles alors : $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.*

Preuve. $(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1})$

$= AA^{-1} \otimes BB^{-1}$ *(d'après le théorème 1)*

$= I \otimes I$

$= I$

Comme $(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = I$ alors $(A \otimes B)$ est l'inverse de $(A^{-1} \otimes B^{-1})$ donc :

$$(A \otimes B)^{-1} = (A^{-1} \otimes B^{-1}).$$

Théorème 4. *Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ sont normales alors $A \otimes B$ est normale.*

Preuve. *Une matrice A est dite normale si : $AA^T = A^T A$. On cherche donc à montrer que :*

$$(A \otimes B)^T (A \otimes B) = (A \otimes B)(A \otimes B)^T.$$

$(A \otimes B)^T (A \otimes B)$

$= (A^T \otimes B^T)(A \otimes B)$ *car d'après le théorème 2 $(A \otimes B)^T = (A^T \otimes B^T)$*

$= A^T A \otimes B^T B$ *d'après le théorème 1.*

$= AA^T \otimes BB^T$ *car A et B sont normales.*

$= (A \otimes B)(A \otimes B)^T$ *d'après le théorème 1.*

On a montré que : $(A \otimes B)^T (A \otimes B) = (A \otimes B)(A \otimes B)^T$.

Conclusion : si A et B sont normales alors $(A \otimes B)$ est normale.

Corollaire 2. *Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ sont orthogonales alors $A \otimes B$ est orthogonale.*

Preuve. *Une matrice A est orthogonale si : $A^T A = AA^T = I$.*

On cherche à montrer que : $(A \otimes B)(A \otimes B)^T = (A \otimes B)^T (A \otimes B) = I$.

$(A \otimes B)(A \otimes B)^T$

$= (A \otimes B)(A^T \otimes B^T)$ *d'après le théorème 2*

$= AA^T \otimes BB^T$ *d'après le théorème 1*

$= I \otimes I$

$= I$

Il en va de même pour : $(A \otimes B)^T (A \otimes B) = (A^T \otimes B^T)(A \otimes B) = I \otimes I = I$.

On a montré que : $(A \otimes B)(A \otimes B)^T = I = (A \otimes B)^T (A \otimes B)$.

Conclusion : si A et B sont orthogonales alors $A \otimes B$ est orthogonale.

Remarque 1. *Soient $A \in \mathcal{M}_{a,a}(\mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{a,b}(\mathbb{R})$.*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1a} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{a1} & \dots & A_{aa} \end{pmatrix} \textit{ et } X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1b} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{a1} & \dots & x_{ab} \end{pmatrix}$$

On a :

$$A \times X = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1a} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{a1} & \dots & A_{aa} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1b} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{a1} & \dots & x_{ab} \end{pmatrix}$$

Soit $X' \in \mathcal{M}_{ab,1}(\mathbb{R})$ *et* $I_b \in \mathcal{M}_{b,b}(\mathbb{R})$.

$$X' = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{a1} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{a2} \\ \vdots \\ x_{1b} \\ x_{2b} \\ \vdots \\ x_{ab} \end{pmatrix} \textit{ et } I_b = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On a :

$$(I_b \otimes A)X' = \left(\begin{array}{c|c|c} A & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & A \end{array}\right) \times \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{a1} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{a2} \\ \vdots \\ x_{1b} \\ x_{2b} \\ \vdots \\ x_{ab} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{i=1}^{a} A_{1i}x_{i1} \\ \hline \vdots \\ \hline \displaystyle\sum_{i=1}^{a} A_{ai}x_{i1} \\ \hline \vdots \\ \hline \displaystyle\sum_{i=1}^{a} A_{1i}x_{ib} \\ \hline \vdots \\ \hline \displaystyle\sum_{i=1}^{a} A_{ai}x_{ib} \end{array}\right) = Z'$$

Si on met Z' sous forme matricielle, Z'' s'écrit :

$$Z'' = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{a} A_{1i}x_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^{a} A_{1i}x_{ib} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{a} A_{ai}x_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^{a} A_{ai}x_{ib} \end{pmatrix}$$

Alors, $Z'' = A \times X$

3 Fonction B-splines

3.1 Définition et propriété de l'enveloppe convexe

On se donne une suite de points $t_0 \leq ... \leq t_m$ de la droite réelle, appelés noeuds. Le vecteur $(t_0, ..., t_m)$ s'appelle le vecteur des noeuds . Si r noeuds sont égaux à un réel t on dit que t est de multiplicité r.
On se donne également des points $P_0, ..., P_m$ dans $\mathbb{R}^n$, appelés points de contrôle qui forment ensemble le polygone de contrôle .

Définition 2. *Soit une suite de noeuds $t_0 \leq ... \leq t_m$ sur la droite réelle. Soit $j = 1, ..., m+1-i$. Si $t_i < t_{i+1}$, on note :*

$$w_{i,j}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+j} - t_i}$$

si $t_i = t_{i+1}$, on pose $w_{i,j} = 0$.

On définit par récurrence sur k les fonctions B-splines $B_{i,k}$ pour $i = 0, ..., m-k-1$, par les relations suivantes.

$$B_{i,0}(t) = 1 \textit{ pour } [t \in [t_i, t_{i+1}]$$
$$B_{i,0}(t) = 0 \textit{ sinon}$$

pour $k \geq 1$

$$B_{i,k}(t) = w_{i,k}(t)B_{i,k-1}(t) + (1 - w_{i+1,k}(t))B_{i+1,k-1}(t).$$

Remarque 2. *Les fonctions B-splines constituent une base (parmi d'autres) de l'espace vectoriel des fonctions définies sur l'intervalle $[t_0, t_{m-k}]$, polynômiales de degré inférieur ou égal à k sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}[$, de classe C^{k-r} au voisinage de chaque noeud de multiplicité r.*

Définition 3. *La fonction B-spline est la somme des fonctions bases avec m points de contrôles $(p_1, ..., p_m)$ et k est l'ordre des fonctions bases b_i $\forall i \in \{1, ..., m\}$*

$$F(q) = \sum_{i=1}^{n} b_i^k(q) p_i$$

Proposition 1. *Propriétés générales des fonction B-splines.*

- *La fonction* $B_{i,k}$ *est sur chaque intervalle* $[t_i, t_{i+1}[$ *un polynôme de degré* $\leq k$.
- *La fonction* $B_{i,k}$ *s'annule en dehors de l'intervalle* $[t_i, t_{i+1}[$.
- *La fonction* $B_{i,k}$ *s'annule aussi en* t_i *sauf si* $t_i = t_{i+1} = ... = t_{i+k} < t_{i+k+1}$ *au quel cas* $B_{i,k}(t_i) = 1$.
- $0 < B_{i,k}(t_i) = 1$ *pour* $t \in]t_i, t_{i+k}[$.
- *Sur l'intervalle* $]t_i, t_{i+k}[$, *la fonction* $B_{i,k}$ *ne prend la valeur 1 que si* $t_{i+1} = ... = t_{i+k}$ *et en ce point seulement.*
- *Sur l'intervalle* $]t_k, t_{m-k}[$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{m-k-1} B_{i,k} = 1$.
- *La fonction* $B_{i,k}$ *est* C^∞ *à droite de chaque point.*
- *Au voisinage d'un noeud de multiplicité* r, *la fonction* $B_{i,k}$ *est seulement de classe* C^{k-r}.

3.2 Les points de contrôle.

3.2.1 Premier cas : dimension égale à 1

On considère toutes les fonctions Bsplines sur l'intervalle qui peuvent s'écrire sous formes de fonctions polynomiales avec les coefficients $\{a_0, a_1, ..., a_n\} \in \mathbb{R}^{n+1}$, on a :

$$\forall q \in [q_-, q^-] \; F(q) \in \sum_{i=0}^{n} a_i q^i$$

On peut écrire la fonction F sous la forme :

$$F(q) = [1, q, ..., q^n] \times [a_0, a_1, ..., a_n]^T$$

Ou encore,

$$F(q) = [1, q, ..., q^n] \times B \times [p_0, p_1, ..., p_n]^T$$
$$\text{avec } [p_0, p_1, ..., p_n]^T = B^{-1} \times [a_0, a_1, ..., a_n]^T.$$

3.2.2 Deuxième cas : dimension égale à n

On suppose que P est un vecteur qui contient les points de contrôles et X un vecteur qui contient les coefficients du polynôme. On a alors la relation suivante entre P et X :

$$P = B^{-1}X.$$

B peut écire sous la forme :

$$B = B_1 \otimes B_2 \otimes ... \otimes B_i \otimes B_n.$$

avec B_i la matrice correspondant au produit vectoriel entre P et X, $\forall i \in [1, n]$ pour chaque point $q_i \in [q_-, q^-]$.

4 Résolution de systèmes linéaires par la méthode du pivot de Gauss.

Nous commençons par un exemple sur deux systèmes de 2 équations à 2 inconnues :
Supposons que l'on ait à résoudre les systèmes suivants :

$$(1) \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 + 4x_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{rcl} x_2 + 2x_4 & = & 2 \\ 3x_2 + 4x_4 & = & 2 \end{array} \right.$$

On constate que ces deux systèmes sont associés à la même matrice $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ainsi, au lieu de résoudre ces systèmes séparément, il est possible de le faire en une seule fois en regroupant les membres de droite sous forme matricielle.
On peut ainsi écrire :

$$AX = B$$

$$\text{Avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Résoudre $AX = B$ permettrait de résoudre simultanément les deux systèmes présentés ci-dessus.

On effectue des opérations sur les lignes pour rendre la matrice A triangulaire supérieure.
Par exemple, à la première étape, on retranche 3 fois la première ligne à la seconde.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Le principe est d'utiliser cette technique pour se ramener à un système triangulaire supérieur dans un premier temps, avec des 1 sur la diagonale, puis à un système diagonal.
On obtient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = \ 1 \\ x_4 = \ 2 \end{cases}$$

4.1 Algorithme.

Algorithme : Recherche un pivot non nul

```
Entrée: pivot (A,j)
Si A[j,j] != 0
Sinon
        i<-j
        Tantque A[i,i]=0 faire
                i<-i+1
        fin tantque
        echanger(A,j,i)
        pivot<-A[j,j]
finsi
fin

Echanger(A,i,j)
        Pour k=1 à nb_colonne faire
                t<- A[i,k]
                A[i,k]<-A[j,k]
                A[j,k]<-t
        finpour
fin
```

4.1.1 Algorithme : Triangulation

Soit $A \in \mathcal{M}_{a,a}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{a,b}(\mathbb{R})$

```
Entrée: A,Y
        Pour i=1 à a-1 faire
                pivot<-pivot(A,i)
                Pour j=1 à b faire
                        Y[i,j]<-Y[i,j]/pivot
                fin pour
```

```
                pour t=i à a faire
                        A[i,t]<-A[i,t]/pivot
                fin pour
                Pour k=i+1 à a faire
                        T<-A[k,i]
                        Pour l=i à a faire
                                A[k,l]<-A[k,l]-T*A[i,l]
                        fin pour
                        Pour q=1 à b faire
                                Y[k,q]<-Y[k,q]-T*Y[i,q]
                        fin pour
                fin pour
        fin pour
        H<-A[a,a]
        A[a,a]<-A[a,a]/H
        Pour m=1 à b faire
                Y[a,m]<-Y[a,m]/H
        fin pour
fin
```

4.1.2 Algorithme : Remontée

Soit $A \in \mathcal{M}_{a,a}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{a,b}(\mathbb{R})$

```
Entrée: A, Y
        Pour i=a-1 à 1 faire
                Pour j=i+1 à 1 faire
                T<-A[i,j]
                        Pour k=b à 1 faire
                                Y[i,k]<-Y[i,k]-T*Y[i+1,k]
                        fin pour
                fin pour
        fin pour
fin
```

4.2 Complexité de l'algorithme de Pivot de Gauss

Complexité :Triangulation

$$\sum_{i=1}^{a-1} (b\,\mathbf{div} + (a-i+1)\,\mathbf{div} + (\sum_{k=i+1}^{a} (a-1+1)\,\mathbf{add} + (a-i+1)\,\mathbf{mult} + b\,\mathbf{add} + b\,\mathbf{mult}))$$

$$= \sum_{i=1}^{a-1} b\,\mathbf{div} + \sum_{i=1}^{a-1} (a-i)\,\mathbf{div} + \sum_{i=1}^{a-1} 1\,\mathbf{div} + \sum_{i=1}^{a-1} (a-i)(a-i+1)\,\mathbf{add} + \sum_{i=1}^{a-1} (a-i)(a-i+1)\,\mathbf{mult}$$

$$+\sum_{i=1}^{a-1} b(a-i)\,\textbf{add} + \sum_{i=1}^{a-1} b(a-i)\,\textbf{mult}$$

$$= (a-1)b\,\textbf{div} + \frac{(a-1)a}{2}\,\textbf{div} + (a-1)\,\textbf{div} + \sum_{i=1}^{a-1}(a-i)^2\,\textbf{add} + \sum_{i=1}^{a-1}(a-i)\,\textbf{add} + \sum_{i=1}^{a-1}(a-i)^2\,\textbf{mult}$$

$$+\sum_{i=1}^{a-1}(a-i)\,\textbf{mult} + \frac{ab(a-1)}{2}\,\textbf{add} + \frac{ab(a-1)}{2}\,\textbf{mult}$$

$$= (a-1)(b+\frac{a}{2}+1)\,\textbf{div} + \frac{a(a-1)(2a-1)}{6}\,\textbf{add} + \frac{a(a-1)}{2}\,\textbf{add} + \frac{a(a-1)(2a-1)}{6}\,\textbf{mult} + \frac{a(a-1)}{2}\,\textbf{mult}$$

$$+\frac{ab(a-1)}{2}\,\textbf{add} + \frac{ab(a-1)}{2}\,\textbf{mult}$$

$$= (a-1)[(b+\frac{a}{2}+1)\,\textbf{div} + \frac{a(2a-1)}{6}\,\textbf{add} + \frac{a(2a-1)}{6}\,\textbf{mult} + \frac{a}{2}\,\textbf{add} + \frac{a}{2}\,\textbf{mult} + \frac{ab}{2}\,\textbf{add} + \frac{ab}{2}\,\textbf{mult}]$$

Donc la complexité totale est égale à :
$\mathcal{O}\big((a-1)(b+\frac{3}{2}a+1+\frac{1}{3}(2a-1)a+ab)\big) \sim \mathcal{O}\big(\frac{2}{3}a^3+a^2b\big)$

Complexité : Remontée

$$\sum_{i=1}^{a-1}(\sum_{k=1}^{b} 1\,\textbf{mult} + 1\,\textbf{add}) = b(a-1)\,\textbf{add} + b(a-1)\,\textbf{mult}$$

Donc la complexité totale est égale à :
$\mathcal{O}(2b(a-1)) \sim \mathcal{O}(2ab)$

Complexité totale de la méthode Pivot de Gauss :

La complexité totale est égale à $\mathcal{O}\big(\frac{2}{3}a^3+a^2b+2ab\big) \sim \mathcal{O}\big(\frac{2}{3}a^3+a^2b\big)$

5 Application

5.1 Résoudre le système linéaire de la forme : $(A \otimes B)X = Y$

Soient $A \in \mathcal{M}_{a,a}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{b,b}(\mathbb{R})$,$X \in \mathcal{M}_{ab,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{ab,1}(\mathbb{R})$.
On veut résoudre le système linéaire :

$$(A \otimes B)X = Y \tag{1}$$

On constate qu'on peut écrire le système linéaire (1) sous la forme :

$$(A \otimes I_b)(I_a \otimes B)X = Y \tag{2}$$

avec $A \in \mathcal{M}_{a,a}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{b,b}(\mathbb{R})$
$X \in \mathcal{M}_{ab,1}(\mathbb{R})$, $Y \in \mathcal{M}_{ab,1}(\mathbb{R})$
$I_a \in \mathcal{M}_{a,a}(\mathbb{R})$ et $I_b \in \mathcal{M}_{b,b}(\mathbb{R})$

Soit $Z \in \mathbb{R}_{ab}$, on pose :

$$(I_a \otimes B)X = Z$$

Donc (2) devient :

$$(A \otimes I_b)Z = Y \tag{3}$$

On va donc résoudre le système linéaire $(A \otimes B)X = Y$ en deux étapes :

1. Résolution du système $(A \otimes I_b)Z = Y$.
2. Résolution du système $(I_a \otimes B)X = Z$.

5.1.1 Etape 1 : résoudre $(A \otimes I_b)Z = Y$.

Soient $A \in \mathcal{M}_{a,a}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{b,b}(\mathbb{R})$,$Y \in \mathcal{M}_{ab,1}(\mathbb{R})$ et $Z \in \mathcal{M}_{ab,1}(\mathbb{R})$ On a :

$$A \otimes I_b = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11}I_b & \dots & A_{1a}I_b \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{a1}I_b & \dots & A_{aa}I_b \end{array}\right), Z = \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} \\ \vdots \\ z_{1b} \\ z_{21} \\ \vdots \\ z_{2b} \\ \vdots \\ z_{a1} \\ \vdots \\ z_{ab} \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1b} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{2b} \\ \vdots \\ y_{a1} \\ \vdots \\ y_{ab} \end{pmatrix}$$

On a le système linéaire :

$$\left\{\begin{aligned} A_{11}z_{11}+A_{12}z_{21}+\ldots+A_{1a}z_{a1}&=y_{11}\\ \vdots\qquad\qquad &=\vdots\\ A_{11}z_{1b}+A_{12}z_{2b}+\ldots+A_{1a}z_{ab}&=y_{1b}\\ A_{21}z_{11}+A_{12}z_{21}+\ldots+A_{1a}z_{a1}&=y_{21}\\ \vdots\qquad\qquad &=\vdots\\ A_{21}z_{1b}+A_{12}z_{2b}+\ldots+A_{1a}z_{ab}&=y_{2b}\\ \vdots\qquad\qquad &=\vdots\\ A_{a1}z_{11}+A_{a2}z_{21}+\ldots+A_{aa}z_{a1}&=y_{a1}\\ \vdots\qquad\qquad &=\vdots\\ A_{a1}z_{1b}+A_{a2}z_{2b}+\ldots+A_{aa}z_{ab}&=y_{ab} \end{aligned}\right.$$

Soient $Y' \in \mathcal{M}_{a,b}(\mathbb{R})$ et $Z' \in \mathcal{M}_{a,b}(\mathbb{R})$

$$Z' = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1b} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2b} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{a1} & z_{a2} & \cdots & z_{ab} \end{pmatrix} \text{ et } Y' = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1b} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2b} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{a1} & y_{a2} & \cdots & y_{ab} \end{pmatrix}$$

On constate que :

$$AZ' = Y' \Leftrightarrow (A \otimes I_b)Z = Y$$

Ainsi, pour résoudre le système linéaire $(A \otimes I_b)Z = Y$, il suffit de résoudre le système $AZ' = Y'$ par la méthode de Pivot de Gauss. La complexité est égale à $\mathcal{O}\big(\frac{2}{3}a^3 + a^2b\big)$.

5.1.2 Etape 2 : résoudre $(I_a \otimes B)X = Z$.

Soient $B \in \mathcal{M}_{b,b}(\mathbb{R})$,$I_a \in \mathcal{M}_{a,a}(\mathbb{R})$,$X \in \mathcal{M}_{ab,1}(\mathbb{R})$ et $Z \in \mathcal{M}_{ab,1}(\mathbb{R})$ On a :

$$I_a \otimes B = \left(\begin{array}{c|c|c} B & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & B \end{array}\right), X = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1b} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{2b} \\ \vdots \\ x_{a1} \\ \vdots \\ x_{ab} \end{pmatrix} \text{ et } Z = \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} \\ \vdots \\ z_{1b} \\ z_{21} \\ \vdots \\ z_{2b} \\ \vdots \\ z_{a1} \\ \vdots \\ z_{ab} \end{pmatrix}$$

On a le système linéaire :

$$\begin{cases} B_{11}x_{11} + B_{12}x_{12} + \ldots + B_{1b}x_{1b} = z_{11} \\ \vdots \qquad\qquad = \vdots \\ B_{b1}x_{11} + B_{b1}x_{12} + \ldots + B_{bb}x_{1b} = z_{1b} \\ B_{11}x_{21} + A_{12}x_{22} + \ldots + B_{1b}x_{2b} = z_{21} \\ \vdots \qquad\qquad = \vdots \\ B_{b1}x_{21} + B_{b1}x_{22} + \ldots + B_{bb}x_{2b} = z_{2b} \\ \vdots \qquad\qquad = \vdots \\ B_{11}x_{a1} + A_{12}x_{a2} + \ldots + B_{1b}x_{ab} = z_{a1} \\ \vdots \qquad\qquad = \vdots \\ B_{b1}x_{a1} + B_{b1}x_{a2} + \ldots + B_{bb}x_{ab} = z_{ab} \end{cases}$$

Soient $X' \in \mathcal{M}_{b,a}(\mathbb{R})$ et $Z^{''} \in \mathcal{M}_{b,a}(\mathbb{R})$

$$Z'' = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{21} & \ldots & z_{a1} \\ z_{12} & z_{22} & \ldots & z_{a2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{1b} & z_{2b} & \ldots & z_{ab} \end{pmatrix} = (Z')^t \text{ et } X' = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \ldots & x_{a1} \\ x_{12} & x_{22} & \ldots & x_{a2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1b} & x_{2b} & \ldots & x_{ab} \end{pmatrix}$$

On constate que :

$$AX' = Z'' \Leftrightarrow (I_a \otimes B)X = Z$$

Donc, pour résoudre le système linéaire $(I_a \otimes B)X = Z$, il suffit de résoudre le système $AX' = Z''$ par la méthode de Pivot de Gauss. La complexité est égale à $\mathcal{O}\big(\frac{2}{3}b^3 + b^2a\big)$.

Ainsi, pour résoudre le système linéaire $(A \otimes B)X = Y$, la complexité est égale à $\mathcal{O}\big(\frac{2}{3}a^3 + a^2b + \frac{2}{3}b^3 + b^2a\big)$

Exemple 6. *Soient $A \in \mathcal{M}_{5,5}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{7,7}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{35,1}(\mathbb{R})$*
On veut résoudre le système linéaire suivant :

$$(A \otimes B)X = Y \tag{4}$$

On pose :

$$D = A \otimes B \in \mathcal{M}_{35,35}(\mathbb{R})$$

Donc (4) devient :

$$DX = Y \tag{5}$$

Par la méthode du Pivot de Gauss, la complexité du système linéaire (5) est $\mathcal{O}((ab)^3)$, soit $(5 \times 7)^3 = 42875$ opérations. Maintenant, si on sépare le système (4) en deux sous système linéaire, on doit :

1. *Résoudre $(A \otimes I_b)Z = Y$.*
   On transforme ce système sous la forme : $AZ' = Y'$ avec $Z^{'} \in \mathcal{M}_{5,7}(\mathbb{R})$ et $Y^{'} \in \mathcal{M}_{5,7}(\mathbb{R})$
   Donc, le nombre d'opérations est de : $\frac{2}{3}5^3 + 5^2 7$.

2. *Résoudre $(I_a \otimes B)X = Z$. On transforme ce système sous forme : $BX' = Z''$ avec $Z^{''} \in \mathcal{M}_{7,5}(\mathbb{R}) = (Z')^t$ et $X^{'} \in \mathcal{M}_{7,5}(\mathbb{R})$*
   Donc, le nombre d'opérations est : $\frac{2}{3}7^3 + 7^2 5$.

Ainsi, le nombre d'opérations total vaut : $\frac{2}{3}5^3 + 5^2 7 + \frac{2}{3}7^3 + 7^2 5 = 732$. L'ordre de complexité est divisé par $58, 6$.

5.2 Résoudre le système linéaire de la forme : $(A \otimes B \otimes C)X = Y$

Soient $A \in \mathcal{M}_{a,a}(\mathbb{R})$,$B \in \mathcal{M}_{b,b}(\mathbb{R})$,$C \in \mathcal{M}_{c,c}(\mathbb{R})$,$X \in \mathcal{M}_{abc,1}(\mathbb{R})$et $Y \in \mathcal{M}_{abc,1}(\mathbb{R})$
On veut résoudre le système linéaire :

$$(A \otimes B \otimes C)X = Y \tag{6}$$

On constate qu'on peut écrire le système linéaire (6) sous la forme :

$$(A \otimes I_{bc})(I_a \otimes (B \otimes C))X = Y \tag{7}$$

avec $A \in \mathcal{M}_{a,a}(\mathbb{R})$,$B \in \mathcal{M}_{b,b}(\mathbb{R})$,$C \in \mathcal{M}_{c,c}(\mathbb{R})$
$X \in \mathcal{M}_{abc,1}(\mathbb{R})$et $Y \in \mathcal{M}_{abc,1}(\mathbb{R})$
$I_{bc} \in \mathcal{M}_{bc,bc}(\mathbb{R})$ et $I_a \in \mathcal{M}_{a,a}(\mathbb{R})$

On pose $(I_a \otimes (B \otimes C))X = Z$ avec $Z \in \mathcal{M}_{abc,abc}(\mathbb{R})$, le système linéaire (7) devient :

$$(A \otimes I_{bc})Z = Y \tag{8}$$

Par la méthode du Pivot de Gauss, on peut résoudre le système linéaire (8).
La complexité est égale à $\mathcal{O}\big(\frac{2}{3}a^3 + a^2bc\big)$.

Puis, on résout le système linéaire $(I_a \otimes (B \otimes C))X = Z$ avec $X \in \mathcal{M}_{abc,1}(\mathbb{R})$et $Z \in \mathcal{M}_{abc,1}(\mathbb{R})$
On peut écrire X et Z sous forme :
$Z' = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1a} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{bc1} & z_{bc2} & \dots & z_{bca} \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{1a} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{bc1} & x_{bc2} & \dots & x_{bca} \end{pmatrix}$
Or, $(I_a \otimes (B \otimes C))X = (B \otimes C)X' = Z'$

Ainsi, pour résoudre le système linéaire $(I_a \otimes (B \otimes C))X = Z$, il suffit de résoudre le système linéaire $(B \otimes C)X' = Z'$ par la méthode du Pivot de Gauss.
La complexité est égale à $\mathcal{O}\big(\frac{2}{3}b^3 + b^2ac + \frac{2}{3}c^3 + c^2ab\big)$

Par cette méthode, la complexité pour résoudre le système linéaire $(A \otimes B \otimes C)X = Y$ est égale à $\mathcal{O}\big(\frac{2}{3}a^3 + a^2bc + \frac{2}{3}b^3 + b^2ac + \frac{2}{3}c^3 + c^2ab\big)$

Exemple 7. *Soient $A \in \mathcal{M}_{5,5}(\mathbb{R})$,$B \in \mathcal{M}_{7,7}(\mathbb{R})$,$C \in \mathcal{M}_{8,8}(\mathbb{R})$,$X \in \mathcal{M}_{280,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{280,1}(\mathbb{R})$*
On veut résoudre le système linéaire suivant :

$$(A \otimes B \otimes C)X = Y \tag{9}$$

On pose :

$$D = A \otimes B \otimes C \in \mathcal{M}_{280,280}(\mathbb{R})$$

Donc (9) devient :

$$DX = Y \tag{10}$$

Par la méthode du Pivot de Gauss, la complexité du système linéaire (5) est $\mathcal{O}((abc)^3)$, soit $(5 \times 7 \times 8)^3 = 21952000$ opérations.
Maintenant, si on sépare le système (9) en deux sous système linéaire, on doit :

1. *Résoudre* $(A \otimes I_{bc})Z = Y$.
   On transforme ce système sous forme : $AZ' = Y'$ *avec* $Z^{'} \in \mathcal{M}_{5,56}(\mathbb{R})$ *et* $Y^{'} \in \mathcal{M}_{5,56}(\mathbb{R})$
   Donc, le nombre d'opérations est de : $\frac{2}{3}5^3 + 5^2 \times 56$.

2. *Résoudre* $(I_a \otimes (B \otimes C))X = Z'$. *On transforme ce système sous forme :* $(B \otimes C)X' = Z''$ *avec* $Z^{''} \in \mathcal{M}_{56,5}(\mathbb{R})$*et* $X^{'} \in \mathcal{M}_{56,5}(\mathbb{R})$
   On applique la méthode du (0.4.1).
   Donc, le nombre d'opérations est de : $\frac{2}{3}7^3 + 7^2 \times 5 \times 8 + \frac{2}{3}8^3 + 8^2 \times 5 \times 7$.

Ainsi, le nombre d'opérations total vaut : $\frac{2}{3}5^3 + 5^2 \times 56 + \frac{2}{3}7^3 + 7^2 \times 5 \times 8 + \frac{2}{3}8^3 + 8^2 \times 5 \times 7 = 6253.3$.
L'ordre de complexité est divisé par $3510, 5$.

6 Conclusion

A l'aide de la méthode du pivot de Gauss pour résoudre les systèmes linéaires, nous avons donc présenté une manière plus rapide de résoudre des systèmes du type : $(A \otimes B \otimes C)X = Y$. Très utilisés dans le cadre de la robotique, ces systèmes peuvent inclure jusqu'à sept matrices différentes, voire plus. On doit alors résoudre un système tel que : $(A \otimes B \otimes C \otimes D \otimes E \otimes F \otimes G)X = Y$. Le gain de temps obtenu grâce aux propriétés sur le produit de Kronecker n'est donc pas négligeable comme nous l'avons montré dans les exemples précédents et s'accroît avec le nombre de matrices incluses dans le système.

A titre de comparaison, comme nous l'avons énoncé en introduction, il est également possible de réduire le temps de calcul de ce type de système avec la propriété sur les inverses du produit de Kronecker :

$$(A \otimes B \otimes C)^{-1}X = (A^{-1} \otimes B^{-1} \otimes C^{-1})X.$$

Inverser une matrice carrée de dimension a a pour complexité $\mathcal{O}(a^3)$. En reprenant les dimensions de l'exemple 7, inverser les matrices A, B et C nécessiterait donc $5^3 + 7^3 + 8^3 = 980$ opérations. S'ajoutent à cela les deux produits de Kronecker entre une matrice de taille 5 et une matrice de taille 7 puis entre une matrice de taille 35 et une matrice de taille 8. Effectuer ces deux produits de Kronecker nécessite donc$\frac{2}{3}5^3 + 5^2 \times 56 + \frac{2}{3}7^3 + 7^2 \times 5 \times 8 + \frac{2}{3}8^3 + 8^2 \times 5 \times 7 = 6253.3$ opérations.
Utiliser la méthode du pivot de Gauss pour résoudre ce type de système s'avère donc nettement avantageuse. Nous voulions implémenter cette méthode sur les codes que nous ont fournis les chercheurs de l'institut Pascal afin de les aider dans leurs travaux de recherches sur ce type de problème, mais nous n'en avons malheureusement pas eu le temps.

7 Bibliographie

- Article, Rawan Kalawoun, Sébastien Lengagne, François Boouchon et Youcef Mezouar, Septembre 2017, "Constraint Satisfaction Problem using Bsplines Interval Analysis : Application to reachability problem of 2D robots"
- K. Schacke, "On the Kronecker Product", 2013
- Alan J. Laub, "Matrix Analysis for Scientists and Engineers", Chapter 13 Kronecker Products
- Cours, Université René Descartes, Résolution des systèmes linéaires, Méthode de Gauss, http ://www.math-info.univ-paris5.fr/ pastre/meth-num/MN/1-gauss/cours-gauss.pdf

- Christophe Ritzenthaler, Cours : Complexité, 2008, http ://iml.univ-mrs.fr/ ritzenth/agregation/cours-complexite2.pdf
- Site internet, Wikipédia, Produits de Kronecker
- Pierre Pansu,Cours :Courbes B-splines,2004, https ://www.math.u-psud.fr/ pansu/web-maitrise/bsplines.p